LOGICA Y TEORIA DE LA CIENCIA

LA LOGICA DE CHARLES SANDERS PEIRCE

Del Algebra a los Gráficos

Pierre Thibaud

PARANINFO S.A

Pierre THIBAUD

LA LOGICA DE CHARLES SANDERS PEIRCE

Del Algebra a los Gráficos

Colección
LOGICA Y TEORIA DE LA CIENCIA

Director:
PASCUAL MARTINEZ FREIRE
Profesor agregado Numerario de Lógica
Universidad Complutense de Madrid

1982

PARANINFO S.A.

MADRID

COLECCION "LOGICA Y TEORIA DE LA CIENCIA"

publicado por PARANINFO S.A.

ALWOOD, ANDERSSON y DAHL.– LOGICA PARA LINGUISTAS.– Completa introducción a la lógica para su aplicación en la lingüística y, especialmente, en la semántica. Incluye un estudio de lógica modal, lógica intensional, gramática categorial y otros temas de interés para el lingüista, además de hacer constante referencia a la relación entre lenguajes naturales y artificiales. (204 págs.– 15,5 x 21,5 cm.– Rústica.)

BOCHENSKI.– COMPENDIO DE LOGICA MATEMATICA.– Especialmente dirigido a estudiantes de lógica de Facultades Universitarias de Letras y Ciencias. Manual escrito por uno de los mayores especialistas en Lógica Matemática e Historia de la Lógica, incluye abundante bibliografía en inglés y español. (120 págs.– 15,5 x 21,5 cm.– Rústica.)

BOOLE.– INVESTIGACION SOBRE LAS LEYES DEL PENSAMIENTO.– La principal obra del creador de la Lógica Matemática. De interés para lógicos y matemáticos. Boole introduce en las modernas técnicas del análisis formal y realiza una amplia discusión de temas filosóficos afines. Al final estudia la teoría de probabilidades. (1981.– Prensa.)

BOUDOT.– LOGICA INDUCTIVA Y PROBABILIDAD.– De gran interés para estudiantes de Lógica, Estadística y Matemáticas. Estudio detallado de las relaciones entre inducción y teoría de la probabilidad. Especial análisis de las teorías de Reichenbach y Keynes. (348 págs.– 15,5 x 21,5 cm.– Rústica.)

FEYS y FITCH.– LOS SIMBOLOS DE LA LOGICA MATEMATICA.– Unica obra en la que se presentan y comparan las distintas notaciones simbólicas de la Lógica Matemática. (192 págs.– 15,5 x 21,5 cm.– Rústica.)

GARDIES.– LOGICA DEL TIEMPO.– Completa exposición de todos los sistemas existentes de lógica temporal. Incluye una discusión de las lógicas temporales gramaticales. (128 págs.– 15,5 x 21,5 cm.– Rústica.)

HAACK.– LOGICA DIVERGENTE.– Minucioso estudio de las más recientes direcciones de la lógica y, especialmente, de las que se apartan de la Lógica ortodoxa. (192 págs.– 15,5 x 21,5 cm.– Rústica.)

HAMILTON.– LOGICA PARA MATEMATICOS.– Destinada a los interesados en la Lógica en general y, sobre todo, a profesores y estudiantes de Matemáticas. Presenta de forma concisa y didáctica las principales técnicas y resultados en lógica matemática. Destaca la importancia de la lógica para el estudio de las matemáticas. (244 págs.– 15,5 x 21,5 cm.– Rústica.)

HUNTER.– METALOGICA. INTRODUCCION A LA METATEORIA DE LA LOGICA CLASICA DE PRIMER ORDEN.– El primer manual completo en castellano sobre este tema. De interés para los estudiosos de la Lógica, las Matemáticas y la Teoría de la Computación. Nociones básicas para el examen de los sistemas lógicos, estudio detallado de las propiedades de los mismos y teoremas anejos. (320 págs.– 15,5 x 21,5 cm.– Rústica.)

MARTINEZ FREIRE.–FILOSOFIA DE LA CIENCIA EMPIRICA.– Investigación exhaustiva de los principales temas de la Ciencia Empírica y de la Lógica Inductiva, siguiendo las doctrinas de Whewell. (232 págs.– 15,5 x 21,5 cm.– Rústica.)

WHITEHEAD y RUSSELL.– PRINCIPIA MATHEMATICA (Hasta * 56). Obra clásica por excelencia de la lógica matemática, que es punto de referencia obligado para los estudiosos de lógica y de matemáticas. Se sostiene en ella el denominado "logicismo" o fundamentación de las materias desde la lógica. Es, a su vez, un estudio completo de los fundamentos de la lógica matemática e inicia en los tópicos de la filosofía de la matemática. (472 págs.– 15,5 x 21,5 cm.– Rústica.)

Traducido por
JOSE MIGUEL GAMBRA

© Editions de l'Université de Provence.
© de la edición española, PARANINFO, S. A. Madrid, España.
© de la traducción española, PARANINFO, S. A. Madrid, España.

Título original:
LA LOGIQUE DE CHARLES SANDERS PEIRCE

Reservados los derechos de edición,
reproducción o adaptación.

IMPRESO EN ESPAÑA
PRINTED IN SPAIN

ISBN: 2-85-399-006-0 (edición francesa)
ISBN: 84-283-1170-6 (edición española)

Depósito Legal: M-2591-1982

PARANINFO S.A. Magallanes, 25 – MADRID (15) (2-2855)

ALCO, artes gráficas. Jaspe, 34 - Madrid-26

INDICE DE MATERIAS

INTRODUCCION 7

CAPITULO I. LA LOGICA DE ENUNCIADOS 11

1. La formulación algebraica 13
1.1. Una nueva "Algebra de la Lógica" 14
1.11. Operaciones "lógicas" y operaciones "aritméticas" 14
1.12. Supresión de las operaciones inversas 16
1.13. Una relación nueva: la inclusión 18
1.14. La nueva álgebra de la lógica 20
1.2. El cálculo enunciativo 31
1.21. Del cálculo de clases al cálculo de enunciados 31
1.22. La naturaleza de la implicación 33
1.23. Los procedimientos deductivos 34
1.24. Los procedimientos matriciales 46
1.25. Reducción de un funtor único 50
2. La formulación gráfica 54
2.1. De los "gráficos de entidades" a los "gráficos existenciales" 54
2.2. Sección Alfa de los "gráficos existenciales" 56
2.21. Símbolos y convenciones de escritura 56
2.22. Las reglas de transformación 61
2.23. Alfa como sistema deductivo 65

CAPITULO II. LA LOGICA DE LOS "RELATIVOS" 75

1. La formulación algebraica 77
1.1. La noción de "relativo general" 77
1.2. El cálculo de relativos binarios 80
1.3. "El álgebra general de la lógica": Hacia una lógica de la cuantificación 90
2. La formulación gráfica 105
2.1. Los primeros gráficos relacionales 105
2.2. El sistema Beta de los gráficos existenciales 111
2.21. Los símbolos y convenciones de escritura 111
2.22. Las reglas de transformación 119
2.23. Beta como sistema deductivo 129

CAPITULO III. LOGICA DE "SEGUNDA INTENCION" Y LOGICA MODAL 143
1. La lógica de "segunda intención" 145
1.1. La formulación algebraica 145
1.2. La formulación gráfica 150
1.21. Expresión gamma de los gráficos alfa y beta 151
1.22. Investigaciones sobre los predicados 154
2. La lógica modal 157
2.1. Las tentativas peircianas de expresión gráfica de la modalidad 157
2.2. Una lógica de los mundos posibles 163
2.3. Sistema Gamma y lógica "pragmática" 169

CONCLUSION: DEL ALGEBRA A LOS GRAFICOS 179
CUADRO CRONOLOGICO 193
INDICE DE LAS OBRAS CITADAS 195

INTRODUCCION

Las investigaciones de Carlos Sanders PEIRCE sobre la lógica simbólica, que fueron prácticamente ignoradas mientras vivió su autor, desde hace unos cincuenta años no dejan de atraer la atención de los lógicos. La publicación de los *Collected Papers*[1] indudablemente no es ajena al renacimiento del interés por este aspecto del pensamiento peirciano. Sin embargo, aunque existen numerosos comentarios de esta lógica, se trata en la mayoría de los casos de alusiones o de notas aisladas y no se encuentra en parte alguna –al menos en lo que nos es dado conocer– una exposición sistemática de la lógica simbólica de PEIRCE[2]. Por otra parte, al poner los comentadores el acento sobre el aspecto algebraico de esta última, todo el aspecto gráfico ha caído en la penumbra: en vano se buscará referencia alguna a los gráficos lógicos de PEIRCE en las notas históricas de la *Introduction to Mathematical Logic* de A. CHURCH[3] o incluso en las obras propiamente históricas de I.M. BOCHENSKI[4] y de W. y M. KNEALE[5]. Sin embargo PEIRCE insiste una y otra vez sobre la

[1] *Collected Papers of Charles Sanders PEIRCE*, Vol. I-VI, Charles HARTSHORNE y Paul WEISS; Vol. VII-VIII Arthur W. BURKS ed. (Cambridge, Massachussetts: Harvard University Press, 1931-1958). Nos referiremos a esta obra utilizando las siglas C.P. seguidas de dos cifras separadas por un punto, la primera de las cuales se refiere al volumen y la segunda al parágrafo (salvo en algunos casos en que la página será expresamente mencionada).

[2] Añadamos que la mayoría de los comentarios proceden de autores americanos y que no existe, hasta hoy, ningún estudio francés sobre la lógica simbólica de este autor.

[3] Alonzo CHURCH, *Introduction to Mathematical Logic*, I (Princeton: Princeton University Press, 1956).

[4] I.M. BOCHENSKI, *Formale Logic*, 2.ª ed. (Freiburg/München: Verlag Karl Alber, 1962).

[5] William & Marta KNEALE, *The Development of Logic* (London: Oxford University Press, 1962). Se esperaría encontrar un estudio preciso de los gráficos de PEIRCE en un libro como el de Martin GARDNER, *Logic Machines and Diagrams* (New-York: 1958). Pero de hecho el autor sólo dedica cinco páginas a PEIRCE, sin dar ningún ejemplo de gráfico, y se limita a una serie de consideraciones generales cuya conclusión consiste en decir que PEIRCE tenía una idea muy exagerada de la importancia de sus diagramas y que el sistema no vale el esfuerzo que se exige para dominarlos (cf. pp. 54-58). Añadamos que nuestra obra estaba acabada cuando hemos podido conocer dos estudios aparecidos en estos últimos años en Estados Unidos y, que a diferencia del nuestro, están dedicados exclusivamente al aspecto gráfico de la lógica peirciana: J. Jay ZEMAN, *The graphical logic of C.S. Peirce* (Chicago: 1964) y Don Davis ROBERTS, *The existential graphs of C.S. Peirce* (Illinois: 1963). Si bien nuestras conclusiones referentes a las propiedades de los diversos sistemas de gráficos peircianos difieren a veces radicalmente de las de ROBERTS (en particular las que se refieren a los sistemas Alfa y Beta), por el contrario coinciden con las de ZEMAN, aunque éstas fueron obtenidas por vías diferentes, menos directas y que a nuestro juicio, podrían ser considerablemente simplificadas. Debe notarse sin embargo que, en un artículo recientemente aparecido ("A system of implicit quantification", *Journal of Symbolic Logic*, 32 (1967) pp. 480-504), ZEMAN propone un nuevo modo de acercamiento que podría utilizarse con ventaja en el estudio del sistema Beta.

necesidad que tiene la lógica simbólica de no limitarse al uso de símbolos algebraicos: *"Si se admite que la lógica simbólica se defina como una lógica (no hablemos por el momento de lógica deductiva) tratada por medio de un sistema particular de símbolos, bien sea que estos símbolos hayan sido creados con tal motivo o que se haya extendido a la lógica el campo de utilización de símbolos ya existentes, será cómodo no restringir los símbolos utilizados a los símbolos algebraicos, sino incluir por igual algunos símbolos gráficos"* (C.P. 4.372; cf. 3.619). Y en 1908 no duda en presentar sus investigaciones sobre los gráficos lógicos como su *"obra maestra"*.[6]

¿Cómo explicar la malquerencia de los lógicos a los gráficos de PEIRCE? Una de las razones debe buscarse sin duda en la terminología misma del autor: el lector es repelido por una multiplicidad de palabras nuevas, a menudo extrañas y cuyo sentido, como se verá, varía a veces de un texto a otro. Por otra parte, no se encuentra en PEIRCE una presentación de conjunto de una teoría gráfica, sino, todo lo más, series aisladas de observaciones escritas en un estilo con frecuencia elíptico y cuya opacidad es, además, reforzada por el insuficiente número de dibujos explicativos. Finalmente hay dificultades para comprender el sistema mismo en la medida en que la notación puede parecer, en primera instancia, menos familiar que la notación algebraica. Pero, de hecho, como se verá, el simbolismo gráfico no es menos natural que otro simbolismo cualquiera y, si bien el optimismo de PEIRCE en cuanto a su aprendizaje no está quizás suficientemente justificado[7], por lo menos los gráficos no son tan complicados como parecen a primera vista.

Este estudio quisiera, pues, devolver a los gráficos el lugar que les corresponde al lado del álgebra lógica, poniendo en paralelo las dos formulaciones y buscando a continuación la que responda mejor al ideal de la lógica tal y como lo concebía PEIRCE. Puesto que el método gráfico ha sido utilizado por PEIRCE en el ámbito de un cálculo de proposiciones, de predicados, de la modalidad y de las investigaciones metateoréticas, consideraremos sucesivamente estos dominios, y el plan seguido –lógica de proposiciones, lógica de predicados, lógica de *"segunda intención"*– se inspirará directamente en el plan de estudio propuesto por PEIRCE desde 1885 (cf. C.P. 3.365-403) y recogido en 1903 (cf. C.P. 4.394-413).[8]

Pero este estudio quisiera al mismo tiempo ofrecer una presentación, todo lo sistemática posible, de las principales aportaciones de PEIRCE en los tres dominios arriba citados. No obstante, aquí se plantea un problema: ¿tenemos acaso derecho a sistematizar un pensamiento cuya principal característica parece ser precisamente la de rechazar toda sistematización? Al lector de los *Collected Papers* inevitablemente

---

[6] C.P. 4, página 291.

[7] PEIRCE pensaba que "algunas horas por día, durante una o dos semanas" (C.P. 4.617) deberían ser suficientes para cualquiera que quisiera familiarizarse con los gráficos y quisiera utilizarlos para sus investigaciones personales.

[8] El estudio de la modalidad se hará en el marco del capítulo sobre la lógica de "segunda intención", conforme al camino seguido por PEIRCE, que esboza un embrión de cálculo modal en el seno mismo de un sistema gráfico –el sistema Gamma– destinado en principio a investigaciones de orden metateorético.

le choca el aspecto un tanto desordenado de los extractos presentados, las repeticiones, las digresiones múltiples, la carencia frecuente de lazo entre los diferentes textos[9]. PEIRCE llegó incluso a escribir en 1903: *"Todo lo que de mis trabajos de lógica ha sido publicado no os ofrece más que los afloramientos esparcidos y desordenados de un rico filón todavía por publicar. En su mayor parte creo que está puesto por escrito, pero ningún ser en el mundo podría coordinar los fragmentos. Yo mismo sería incapaz de ello".*[10] Nos parece sin embargo, que sería erróneo otorgar a estas alegaciones la importancia que parecen darles los editores de los *Collected Papers,* que las sitúan en el exergo del volumen II de su antología. Pues, si la expresión es a menudo fragmentaria, el pensamiento es siempre sistemático, al menos en la medida en que se caracteriza por un esfuerzo constante por considerar repetidamente y profundizar en los mismos problemas. Por cierto, que si bien PEIRCE, por razones diversas[11], no logró jamás ofrecernos una presentación un poco acabada de su obra, se sabe que trabajaba en ello al final de su vida. Efectivamente hizo imprimir por su cuenta un texto que anunciaba, con alguna pretenciosidad desde luego, *una obra exhaustiva en 12 volúmenes"* que debía titularse *"Los Principios de la Filosofía: La Lógica, la Física y la Psicología vistas como una sola ciencia, conforme a las perspectivas del siglo XIX".*[12] Pero tuvo que abandonar este proyecto por falta de suscriptores. No obstante PEIRCE seguía trabajando especialmente en la terminación de su obra lógica y, cuando hacia 1902 se dirigió al CARNEGIE FUND para la publicación de sus obras, se proponía entregar 36 memorias, *"cada una de las cuales constituiría un todo por sí mismas y formaría un sistema unitario de lógica en todas sus partes".*[13] Aunque su petición fue rechazada[14], no por eso es menos verdadero que por entonces PEIRCE trataba de reunir los "fragmentos"

---

[9] Este último carácter está, necesario es decirlo, acentuado por el estilo de presentación puramente cronológica adoptado por los editores de los *Collected Papers* en el interior de cada volumen y por el hecho de los numerosos cortes practicados por estos últimos en los textos de PEIRCE.

[10] C.P. 2, página 2.

[11] Entre estas razones quizás habría que citar la indiferencia de los editores. Un proyecto que había forjado de publicar un artículo de lógica cada mes en diversas revistas, fue pronto abandonado por la falta de interés que ello suscitó. Su *Gran Lógica* de 1893 no halló editores. Sin duda éstos lo encontraban demasiado avanzado para su siglo y demasiado especializado. Quizás también preferían los escritos de un universitario. Pero sabido es que PEIRCE no llegó nunca, a pesar de las gestiones en su favor de W. JAMES y J. ROYCE, a obtener un puesto de dedicación completa en la universidad, en parte, sin duda, por culpa de sus opiniones religiosas, de su vida irregular y de su carácter muy independiente. Murió, por cierto, en la mayor de las poblezas, enfermo y aislado, viviendo de los pobres recursos que le proporcionaron algunos artículos en diversas revistas y el pequeño fondo que logró reunir W. JAMES recurriendo a viejos amigos y a estudiantes. Para un estudio de la vida de PEIRCE se puede consultar la tesis de J.L. BRENT, *A Study of Life of C.S. PEIRCE* (Los Angeles: University of California Press, 1960).

[12] C.P. 8, p. 282 (PEIRCE anunció su proyecto en *The Nation* en 1894: Cf. C.P. 8, página 306).

[13] Citado por Pablo WEISS, en su biografía de C.S. PEIRCE escrita en 1934 para el *Dictionary of American Biography,* p. 403.

[14] La razón oficial era que, al no ser la lógica una ciencia natural, no pertenecía al dominio del CARNEGIE FUND.

dispersos de su lógica. Este es el fin al que, por su parte, modestamente querría contribuir este breve estudio.

* * *

Séanos permitido aquí dar las gracias a cuantos me han alentado en este trabajo o han permitido su realización y acabamiento, entre los cuales destacan el Sr. G.G. GRANGER que con benevolencia lo ha dirigido y estimulado con sus objeciones, los Sres. L. FREY y A. RAGGIO que lo han enriquecido con sus sugerencias y, finalmente, el Sr. Ph. NGUYEN VAN MINH que lo ha facilitado, al ocuparse junto a nosotros de cierto número de dificultades halladas a lo largo de nuestra reflexión sobre PEIRCE.

Capítulo I

LA LOGICA DE ENUNCIADOS

LA LOGICA DE ENUNCIADOS

1. LA FORMULACION ALGEBRAICA

En su estudio consagrado al desarrollo de la teoría lógica de PEIRCE, S. UEYAMA parece sugerir que el interés de PEIRCE por la lógica de enunciados se despertó gracias a la lectura de las *Summulae Logicales* de Pedro de ESPAÑA[1]. Indudablemente tal juicio debería matizarse. Pues aunque es de creer que PEIRCE pudo estar influido por ese esbozo de la lógica de enunciados que fue la teoría medieval de las *consequentiae*, ha de notarse que tal lógica se desarrolla sobre todo con OCKHAM y DUNS SCOTO –por los cuales, además, PEIRCE se había interesado desde muy temprano– y no con Pedro de ESPAÑA en cuya obra la noción de *consequentia* no está todavía bien definida[2].

En realidad parece que PEIRCE sólo bastante tarde se interesó por una lógica de enunciados. S. UEYAMA hace notar que en tiempos de sus primeras lecturas de BOOLE, antes de 1867 por tanto, el fracaso de BOOLE al intentar exponer una lógica de enunciados había decepcionado a PEIRCE[3]. De hecho, sus primeros artículos sobre BOOLE no contienen críticas en este sentido y PEIRCE no parece haberse interesado por esta lógica antes de 1880. Las primeras investigaciones de PEIRCE sobre la lógica simbólica, publicadas en 1867, tratan principalmente sobre el cálculo de clases que PEIRCE, como ya lo hizo BOOLE, parece considerar, en esta época, el cálculo fundamental. Por ello, antes de considerar las contribuciones perciana a la lógica de enunciados, examinaremos primeramente los perfeccionamientos logrados por PEIRCE en el terreno del *"Algebra de la lógica"* propiamente dicha.

---

[1] S. UEYAMA, "Development of PEIRCE'S theory of Logic", *The Science of Thought*, I (1954), p. 25.

[2] Cf. Pedro HISPANO, *Summulae Logicales*, I.M. BOCHENSKI ed. (Turin: 1947), 1.31, 3.33, 3.34, 7.58, 7.61. En 3.34 habla en particular de *consequentia essentiae*, y opera aquí, como lo hace ABELARDO y también a veces KILWARDBY, en el terreno de una lógica de términos y no de enunciados.

[3] S. UEYAMA, *loc. cit.*, p. 26.

1.1. Una nueva "Algebra de la Lógica"

1.11. Operaciones "lógicas" y operaciones "aritméticas"

El algebra booleana de la lógica estaba en estrecha dependencia de la aritmética. Ya JEVONS en 1864[4] no había dejado de señalar los inconvenientes de semejante situación. En particular la adición booleana, que es una operación de tipo aritmético, aboca a expresiones del tipo $a + a$ que no pueden interpretarse como relaciones de clases lógicas y, en el caso de un álgebra de números, introduce coeficientes ajenos a 1 y 0: $a + a = 2a$. Tiene especial interés notar que, desde su primer ensayo de marzo de 1867[5], PEIRCE, aunque ignoraba lo que había hecho JEVONS, percibe los límites de un excesivo matematicismo y trata de ponerle remedio. Sigue admitiendo las cuatro operaciones de BOOLE –dos directas y dos inversas– pero va a distinguir las operaciones aritméticas de las operaciones lógicas. En efecto, la adición y la sustracción booleanas tienen propiedades que se aproximan estrechamente a las de las correspondientes operaciones de la aritmética. Por el contrario, en la multiplicación y la división no se corresponden, en BOOLE, para números que no sean 0 y 1. La innovación de PEIRCE va pues a consistir en el desdoblamiento de las operaciones booleanas para abocar a ocho tipos de relaciones.

De esta manera, se distinguirán en primer lugar cuatro operaciones aritméticas, de las cuales dos corresponden a la adición y a la resta booleanas, las dos restantes –la multiplicación y la división aritméticas– sólo las utilizará PEIRCE para la aplicación de su sistema a la teoría de probabilidades[6]. Pero las operaciones más interesantes, para el cálculo que nos ocupa, son las que PEIRCE llama *"lógicas"* y que, en los primeros artículos, distingue de las operaciones precedentes por medio de una coma situada bajo el símbolo matemático ordinario[7]. Dos de esta operaciones, la multiplicación y la división, corresponden exactamente a las operaciones booleanas del mismo nombre, pero dos son nuevas: la suma y la resta.

La suma lógica es tal que *"$a + b$"* designa *"todos los individuos contenidos en a y b tomados en conjunto"* (C.P. 3.3). Se distingue, escribe PEIRCE, de la operación aritmética correspondiente por el hecho de que *"no se considera más que una sola*

[4] W.St. JEVONS, *Pure Logic or the Logic of Quality apart from Quantity* (London, New-York: 1864), pp. 70-71 especialmente.

[5] "On an improvement in BOOLE'S calculus of Logic", *Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences,* VII (marzo de 1867), pp. 250-261.

[6] Cf. "Upon the Logic of Mathematics", *Proceedings ot the American Academy of Arts and Sciences,* VII (septiembre de 1867), pp. 402-412. En este artículo define *ab* como los acontecimientos *a* y *b* tomados conjuntamente y restringe la operación al caso en que *a* y *b* son independientes (Cf. C.P. 3.21).

[7] SCHRÖDER en *Vorlesungen über die Algebra der Logik, I* (Leipzig: 1890), pp. 193-194 ha visto claramente los inconvenientes de semejante notación al mostrar por ejemplo que para *f (a, b, c)* no se puede distinguir si *a, b, c, ...* representan un grupo de varios símbolos o si un solo símbolo representa el producto de los otros. PEIRCE abandona la coma para la igualdad lógica desde 1870 y, para las otras operaciones, en 1880 (aunque vuelve a utilizar la coma para el producto lógico en 1882). En las citas que haremos conservaremos generalmente la notación empleada en ese momento por PEIRCE.

vez lo que es común a a y a b" (C.P. 3.3; Cf. 3.199, n.2). Parece que PEIRCE fue primeramente llevado a introducir esta nueva operación para evitar las dificultades a que conduce la suma exclusiva en el lenguaje ordinario. De esta forma, escribe, si f designa los franceses y v los violinistas, la suma booleana de $f + v$ *"designa el conjunto de los franceses además del conjunto de los violinistas, y por ende, considerada como término lógico, implica que la clase de los violinistas franceses es exterior a sí misma. Por esta sola razón, en el artículo aparecido en las Actas de la Academia del 17 de marzo de 1867, he preferido elegir como norma de la suma lógica una operación tal que*

$$m +, b$$

representa la totalidad de los hombres y de los objetos negros, sin implicar en absoluto que los objetos negros deban ser tomados fuera de los hombres" (C.P. 3.67). PEIRCE no fue el primero en utilizar la suma no exclusiva. Ya GALENO[8] y más tarde, en la Edad Media, BURLEIGH[9] mencionan una disyunción no exclusiva. En el siglo XIX, unos años antes que PEIRCE, JEVONS[10] ya había substituido la suma booleana por la *"agregación"* de A. de MORGAN[11]. Pero, al parecer, en 1867, PEIRCE ignoraba los descubrimientos de sus predecesores[12]. Por otra parte, puede decirse que es el primero en percatarse del alcance de su descubrimiento. Ante todo señala que la suma y la resta lógicas otorgan una cierta unidad al sistema (cf. C.P. 3.18), en la medida en que hacen posible una cierta simetría entre los teoremas que incluyen la suma y los que encierran la multiplicación lógica. Sabido es que esta ventaja será declarada de forma plenamente explícita por E. SCHRÖDER que dispone sus teoremas en columnas paralelas[13]. Además, en el artículo de marzo de 1867, PEIRCE muestra cómo el cambio por él introducido facilita los ejercicios de los lógicos de la época, a saber, el cálculo de probabilidades y la solución de las ecuaciones lógicas (Cf. C.P. 3.9-3.19). En lo que a este último punto se refiere puede señalarse que el álgebra de la lógica de PEIRCE posee la ventaja, sobre el sistema de JEVONS, de conservar los métodos matemáticos booleanos de resolución. La aplicación de los métodos booleanos de cálculo a las nuevas operaciones introducidas por PEIRCE resulta, en efecto, posible si notamos que en todas las funciones

[8] GALENO, *Institutio Logica*, Kalbfleisch ed. (Leipzig: 1896), en particular V, 11, 24-12,8.

[9] W. BURLEIGH, *De puritate artis logicae tractus longior*, Boehner ed. (Lovaina: 1955). en particular 91, 3-19.

[10] JEVONS, *op. cit.*, en particular pp. 70-71.

[11] A. DE MORGAN "On the Syllogism", *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, VIII (1846), IX (1851), X (1864).

[12] PEIRCE escribe en 1870: "Desde la aparición de este artículo (el artículo de marzo de 1867) he podido darme cuenta de que el Sr. W. STANLEY JEVONS, en un folleto titulado *Pure Logic, or the Logic of Quality*, se adelantó a mí en la substitución de la adición de BOOLE por la misma operación" (C.P. 3.67; Cf. 3.199, n.2).

[13] E. SCHRÖDER, *op. cit.*, I. Tal como lo nota PEIRCE en C.P. 4.277, A. DE MORGAN ya había entrevisto la existencia de una "perfecta correspondencia" entre la suma y la multiplicación lógicas pero, escribe PEIRCE, "me ha correspondido a mí dar la primera demostración de ello y llevar a cabo su primera aplicación precisa al álgebra bivalente".

desarrolladas según la ley de BOOLE: $f(x) = f(1)\,x + f(0)\,(1 - x)$ los términos de la parte derecha de la ecuación siempre representan las clases que se excluyen mutuamente. De esta manera, la diferencia entre la suma lógica y la suma aritmética desaparece aquí y toda relación del sistema de PEIRCE puede entonces desarrollarse según las leyes booleanas, si se interpretan correctamente los coeficientes.

1.12. Supresión de las operaciones inversas

Pero, una vez que PEIRCE se apartó del matematicismo de BOOLE, no tardó en simplificar todavía más el cálculo booleano con una tendencia a la supresión de las operaciones inversas. Ya, en el artículo de marzo de 1867, nota que la resta lógica *"$a \dot{-} b$"* no puede interpretarse más que si la clase b está contenida en la clase a y que, incluso en tal caso, la operación *"$a \dot{-} b$"* no está definida de manera unívoca pues si tenemos *"$x \dot{=} a \dot{-} b$"* se da una variación entre un límite superior (cuando todo b es x) y un límite inferior (cuando ningún b es x).[14] Cosa que PEIRCE resume con las palabras siguientes: *"Si... indicamos la negación de una clase por medio de la letra que indica la clase misma, pero subrayándola, si indicamos con v una clase enteramente indeterminada, y si admitimos que* $(0 \dot{-} 1)$ *es un símbolo imposible de interpretar, obtenemos*

$$a \dot{-} b \dot{=} v\,,\, a\,,\, b + a\,,\, \bar{b} + (0 \dot{-} 1)\,,\, \bar{a}\,,\, b$$

que no puede interpretarse salvo si $\bar{a}\,,\, b \dot{=} 0$*"* (C.P. 3.5).[15] Lo mismo sucede con la división lógica: *"Sea que a ; b significa "a lógicamente dividido por b" y que es definido por la condición siguiente:*

$$Si\ b\,,\, x \dot{=} a \qquad\qquad x \dot{=} a\,;\, b$$

x no está enteramente determinado por esta condición. Habrá una variación entre a y $a + \bar{b}$ *y no podrá interpretarse si a no está enteramente incluido en b. Por tanto si* $(1\,;\,0)$ *es un símbolo que no puede interpretarse*

$$a\,;\, b \dot{=} a\,,\, b + v\,,\, \bar{a}\,,\, \bar{b} + (1\,;\,0)\,a\,,\, \bar{b}$$

que no puede interpretarse, salvo si $a\,,\, \bar{b} \dot{=} 0$*"* (C.P. 3.6).[16].

---

[14] "Se observa aquí que x no está completamente determinada. Puede variar de a a a menos b. Este mínimo puede designarse por medio de $a - b$" (C.P. 3.5).

[15] El producto lógico de a y b se simboliza aquí por medio de a, b. La expresión significará la clase *"$a \dot{-} b$"* es igual a la clase indeterminada de lo que es a la vez a y b, más la clase de lo que es a pero no b, a condición de que ningún b no sea no a. Cosa que se podría hacer más explícita utilizando la figura siguiente, donde a representaría toda la superficie del círculo:

[16] Es decir la clase *"$a\,;\,b$"* es igual a la clase de lo que es a la vez a y b, más la clase indeterminada de lo que no es ni a ni b, a condición de que ningún a sea no b.

En el artículo del mismo año, aparecido en septiembre, no trata más que de las operaciones directas, señalando que *"como las operaciones inversas no tienen ningún interés lógico particular, no se habla de ellas aquí"* (C.P. 3.41).[17] En 1870, al analizar la modificación con que contribuyó JEVONS al álgebra de BOOLE, resalta que podría substituirse la resta lógica por la multiplicación lógica, gracias al principio de contradicción: *"Por ejemplo, si x es desconocida, tenemos:*

$$x +, m = a$$

(dicho de otra manera, lo que es representado por x, añadido a hombres, de animales), sólo podemos concluir, en lo que a x se refiere, que representa, entre otras cosas quizás, todos los animales no hombres: es decir que la clase de los x no hombres es igual a la clase de los animales no hombres. Representando "no hombres" por $\bar{m}$*, tenemos entonces por multiplicación:*

$$x\,,\,\bar{m} +, m\,,\,\bar{m} = x\,,\,\bar{m} = a\,,\,\bar{m}$$

pues, en virtud del principio de contradicción, $m,\ \bar{m} = 0$*"* (C.P. 3.90).[18] De la misma manera podría substituirse la división lógica por la suma lógica gracias al principio del tercero excluso: *"... Supongamos que, permaneciendo x desconocida, tengamos:*

$$a\,,\,x = m$$

La única conclusión que en tal caso podemos sacar es que las x están formadas de todos los m, y puede ser que de alguno o de la totalidad de los no a o que la suma de las x y de las no a equivalente a la suma de las m y de las no a. Ahora bien, supuesto que $\bar{a}$ *significa no a, añadamos* $\bar{a}$ *de un lado y otro; obtenemos:*

$$a\,,\,x +, \bar{a} = m +, \bar{a}$$

Por tanto en virtud de (28) (es decir $(x +, y)\,,\,(x +, z) = x +, y\,,\,z$*) se obtiene:*

---

[17] Puede notarse sin embargo que este artículo de septiembre de 1897 queda, en otros aspectos, por debajo del de marzo del mismo año, en la medida en que tiende a reforzar algunas analogías matemáticas. Así, PEIRCE introduce la multiplicación aritmética que no aparecía en el artículo precedente. Por otra parte, limita su teorema referente a la suma booleana (si $a + b \mathbin{\overline{+}} c$ y $a' + b \mathbin{\overline{+}} c$ entonces $a \mathbin{\overline{+}} a'$) al caso en que b no es una clase universal. De hecho el teorema es igualmente verdadero si b es una clase universal ya que, dado que la suma aritmética es una suma exclusiva, a y a' quedan determinados como la clase vacía. Se puede interpretar la eliminación de este caso por PEIRCE como un ensayo para mantener la analogía con el hecho de que, en aritmética, el teorema correspondiente no conviene cuando b es un cardinal infinito, pues, en tal caso, las cantidades finitas pueden añadirse a las infinitas sin modificar el total (Cf. C.P. 3.27).

[18] En el artículo: "Description of a Notation for the Logic of relatives, resulting from an amplification of the conceptions of BOOLE'S calculus of Logic", *Memoirs of the American Academy*, IX (1870), pp. 317-78.

$$(a +, \bar{a}) , (x +, \bar{a}) = m +, \bar{a}$$

Pero en virtud del principio del tercero excluso

$$a +, \bar{a} = 1$$

y por tanto

$$x +, \bar{a} = m +, \bar{a}$$

No conozco que M. JEVONS haya hecho realmente uso de este último procedimiento, pero nada le impide hacerlo. De esta manera el álgebra de M. JEVONS aventaja en simplicidad a la de BOOLE" (C.P. Ibid.). Sin embargo PEIRCE persiste todavía en 1870 en la utilización de algunas operaciones inversas. Sólo en 1880[19] se decide a no utilizar en adelante más que dos operaciones: la suma y la multiplicación lógicas.

1.13. Una relación nueva: la inclusión

Pero la manera en que, en el artículo de 1870, se definen estas dos operaciones restantes nos sitúa ante una innovación todavía más original. PEIRCE escribe en efecto (C.P. 3.199):

Si $a \prec x$ y $b \prec x$	Si $x \prec a$ y $x \prec b$
entonces $a + b \prec x$	entonces $x \prec a \times b$

PEIRCE utiliza aquí una nueva relación entre clases, la inclusión que ya había introducido en 1870, definiéndola como sigue: *"Estar incluido en, o ser tan pequeño como es una relación transitiva. De lo cual se sigue que si* $x \prec y$, *e* $y \prec z$, *entonces* $x \prec z$" (C.P. 3.47). Bien es verdad que un símbolo moderno de la relación de inclusión en general había aparecido ya con J.D. GERGONNE en 1816,[20] y pocos años después con A. DE MORGAN[21], pero a PEIRCE se debe la elaboración siste-

---

[19] "On the Algebra of Logic", *American Journal of Mathematics,* III (1880), pp. 15-57. Ha de notarse que antes de PEIRCE, ya rechazaba JEVONS las operaciones inversas. Después de los cambios introducidos por JEVONS y PEIRCE el único lógico que defendió las operaciones inversas así como la adición booleana fue VENN: véase especialmente en *Mind* (1883), pp. 593-603 su reseña del ensayo de Miss LADD-FRANKLIN aparecido en el mismo año en *Studies in Logic, By Members of the Johns Hopkins University* (Boston: 1883). Se encontrará una excelente crítica de las ideas de VENN acerca de la adición booleana y de las operaciones inversas en una carta de H. MacCOLL que apareció en *Nature* (9 de junio de 1881), pp. 124-126.

[20] J.D. GERGONNE, Essai de Dialectique rationelle, *Annales de Mathematiques pures et appliquées,* VII (1816/1817), pp. 189-228.

[21] A. DE MORGAN, *Formal Logic, or the Calculus of inference, necessary and probable* (London: 1847); el símbolo de 1847 fue modificado en 1856 en el artículo "On the symbols of

mática del concepto y su primera utilización como relación fundamental en la lógica de clases. Al comentar la contribución de PEIRCE, H. MacCOLL, en un artículo aparecido en *Nature*, señala ante todo que el signo $-<$, tal como PEIRCE lo define en 1870, *"es simplemente equivalente a las palabras "no es más grande que" y, por ende, está reservado al dominio de los números".*[22] Pero semejante definición resulta demasiadó restringida y MacCOLL no tarda en percatarse de ello: *"En mi reciente carta sobre la lógica simbólica (ver Nature, Vol. XXIII, p. 578) he dicho que el símbolo de inclusión del profesor PEIRCE, tal como es definido en su "Logic of relatives", era equivalente a las palabras "no es más grande que". Esto, sin embargo, no es totalmente correcto; pues, aunque el profesor PEIRCE habla de este símbolo como equivalente a las palabras "es tan pequeño como", habla de él también como medio de designar la "inclusión" y su ejemplo* $f -< m$ *puede leerse: "La clase f está incluida en la clase m".*[23] Pero la gran novedad de PEIRCE en 1880 es considerar la relación de inclusión como la relación fundamental de la lógica y definir a partir de ella sola las otras operaciones de suma y de multiplicación. Es de notar que desde 1870 PEIRCE definía la igualdad a partir de la inclusión (Cf. C.P. 3.48), lo cual le permitía al mismo tiempo justificar su signo $-<$: *"Utilizo el signo* $-<$ *en lugar de* $\leqq$. *Las razones que personalmente me hacen rechazar este último signo son dobles: hace falta demasiado tiempo para escribirlo y parece presentar la relación que expresa como compuesta de otras que, de hecho, son formas más complejas. Se admite universalmente que de dos conceptos ligados el más abstracto es, en lógica, el más simple. Por consiguiente, y habida cuenta de las relaciones de extensión y de comprensión, se sigue que, en un estado de información cualquiera, un concepto amplio que incluye un concepto más estrecho es más simple que este último. Ahora bien, toda igualdad se reduce a incluir, pero la conversa no es verdadera. De lo cual se sigue que la inclusión es un concepto más amplio que el de igualdad y por tanto, en lógica, un concepto más simple. Según el mismo principio, la inclusión es igualmente una relación más simple que la relación "más pequeño que". El signo* $\leqq$ *parece implicar una definición por enumeración y una tal definición se opone a las leyes de la definición"* (C.P. 3.47,n. I; Cf. 3.173,n. 2). Esta demostración de la prioridad lógica de la inclusión sobre la igualdad iba a modificar considerablemente el rostro de la lógica, pues permite pasar de una lógica de ecuaciones –a la cual, todavía en el siglo XIX, son afectos JEVONS y VENN[24]– a una lógica de la inclusión y, más adelante, de la implicación.

Logic, the Theory of syllogism and in particular of the copula, and the application of the theory of probabilities to some question of evidence", *Transactions of the Cambridge philosophical Society*, IX (1856), pp. 79-127.

[22] Carta de MacCOLL en contestación a JEVONS, *Nature* (21 de abril de 1881), p. 578.

[23] Carta de MacCOLL, *Nature* (5 de mayo de 1881), p. 5.

[24] JEVONS especialmente, en su artículo titulado "Recent Mathematico-Logical Memoirs" (24 de marzo de 1881), *Nature*, pp. 485-487, reprocha a PEIRCE la elección de la inclusión como relación fundamental. Justifica su crítica de PEIRCE de la forma siguiente: "Una clase está hecha de individuos y la concepción misma de una clase indica así la relación de identidad expresada por A = B. Si digo que el color del hielo de un glaciar es idéntico al color del agua de

1.14. La nueva "álgebra de la lógica"

Puede decirse que con la cópula inclusiva nace una nueva álgebra de la lógica. El examen de este álgebra nos lleva a estudiar sucesivamente las principales fórmulas descubiertas por PEIRCE y el método, preconizado por PEIRCE, para la resolución de problemas en lógica no relativa.

En lo que a las fórmulas se refiere, nos limitaremos a la revisión de las que fueron descubiertas por PEIRCE hasta 1880, fecha en la que empieza a interesarse por el dominio del cálculo proposicional. No ofreceremos más que las fórmulas principales, con el simbolismo utilizado en 1880 en el artículo ya citado "On The Algebra of Logic",[25] indicando para cada fórmula la referencia a los *Collected Papers* y la fecha de la primera aparición.

"Definiciones"[26]

– Inclusión:

$$\text{Si } x \prec y \text{ y } y \prec z \text{ entonces } x \prec z \qquad \text{C.P. 3.47 (1870)}$$

$$x \prec x \qquad \text{C.P. 3.182 (1880)}$$

– Igualdad:

$$\text{"Decir que } x = y \text{ es decir que } x \prec y \in y \prec x\text{"} \qquad \text{C.P. 3.48 (1870)}$$

– Producto:

$$\text{Si } x \prec a \text{ y } x \prec b$$

$$\text{Entonces } x \prec a \times b$$

---

lluvia pura, es imposible dividir esta afirmación en "los colores del hielo están entre los del agua de lluvia pura" y "los colores del agua de lluvia pura son etc.". El color es un color uno e indivisible. Ahora bien, si en la base de todo razonamiento hay una afirmación elemental de la forma A = B, que no puede resolverse en algo más simple, esto prueba suficientemente que el A $\prec$B de PEIRCE o el A)) B de DE MORGAN no pueden ser la forma elemental original de la afirmación". De hecho parece que el error de JEVONS en este ejemplo consiste en pasar de una relación entre clases reducidas a un solo elemento a una relación entre dos elementos.

[25] En este artículo el producto lógico está representado por x y la suma por +. Debe notarse que a partir de 1881 ("On the Logic of Number", *The American Journal of Mathematics,* IV (1881), pp. 85-95) PEIRCE ya no utiliza el signo x para la multiplicación lógica y se contenta con una simple yuxtaposición de términos (aunque se sirve de una coma en 1882). A partir de 1897 (Cf. C.P. 3.495), en los artículos publicados, utilizará el punto para la multiplicación lógica y representará la suma lógica por medio de $\dagger$. Esta última es igualmente representada en 1902 por medio de v (Cf. C.P. 4.276). Debe notarse también que a partir de 1897 escribe cursivamente el signo de inclusión $\sim\!\prec$ (Cf. C.P. 3.496).

[26] Empleamos aquí el mismo término de PEIRCE (Cf. C.P. 3.198 y 200).

Y recíprocamente

Si $x \prec a \times b$

Entonces $x \prec a$ y $x \prec b$ C.P. 3.199 (1880)

– Suma:

Si $a \prec x$ y $b \prec x$

Entonces $a + b \prec x$

Y recíprocamente

Si $a + b \prec x$

Entonces $a \prec x$ y $b \prec x$ C.P. 3.199 (1880)

– Cero:

$0 \prec x$ cualquiera que sea x C.P. 3.198 (1880)

– Unidad[27]:

$x \prec 1$ cualquiera que sea x C.P. 3.198 (1880)

Para la negación PEIRCE vuelve a utilizar los axiomas ya empleados antes que él, es decir:

$$x \times \bar{x} = 0 \quad \text{y} \quad x + \bar{x} = 1$$

siendo la doble negación introducida por:

$$x \prec \bar{\bar{x}} \quad \text{y} \quad \bar{\bar{x}} \prec x.^{28}$$

Teoremas

a) Teoremas que muestran una simetría entre las operaciones de suma y de multiplicación:

---

[27] A partir de 1880 PEIRCE substituye el símbolo 1 que significa "la clase de la cual toda clase es una parte" (C.P. 3.7) por medio del símbolo ∞, conforme a lo que ya sugirió en 1870 en "Description of a Notation for the Logic of relatives" donde mostraba que las propiedades generales de 1 se corresponden con las del infinito (Cf. C.P. 3.88). SCHRÖDER preferirá conservar el 1 y pedirá que se reserve el símbolo ∞ para la incompatibilidad (Cf. SCHRÖDER, *op. cit.*, I, pp. 274-276).

[28] La fórmula $x \prec \bar{\bar{x}}$ es presentada en PEIRCE como el principio de contradicción y la fórmula $\bar{\bar{x}} \prec x$ como el principio del tercero excluso (Cf. C.P. 3.192).

(1) $a \prec a + b$

C.P. 3.81 (1870)

(2) $b \prec a + b$

C.P. 3.200 (1880)

(3) Si $a \prec b$ entonces hay un término x tal que $a + x = b$.

C.P. 3.91 (1870)

(4) Si $a \prec b \quad c + a \prec c + b$.

(Ibid.)

(5) $b + a \prec a + b$

C.P. 3.200 (1880)

(6) $b + c \prec a + (b + c)$

(Ibid.)

(7) $c \prec a + (b + c)$

(Ibid.)

(8) $b \prec a + (b + c)$

(Ibid.)

(9) $a \prec a + (b + c)$

(Ibid.)

(10) $a + b \prec a + (b + c)$

(Ibid.)

(11) $(a + b) + c \prec a + (b + c)$

(Ibid.)

(12) $(a + b) + c = (a + c) + (b+c)$

(Ibid.)

(13) $(a \prec b) \times (x \prec y) \prec \prec (a + x \prec b + y)$[29]

(Ibid.)

(14) $(a + b \prec c) = (a \prec c) \times \times (b \prec c)$

(Ibid.)

$a \times b \prec a$

C.P. 3.91 (1870)

$a \times b \prec b$

C.P. 3.200 (1880)

Si $a \prec b$ entonces hay un término x tal que $b \times x = a$.

C.P. 3.91 (1870)

Si $a \prec b \quad c \times a \prec c \times b$.

(Ibid.)

$a \times b \prec b \times a$

C.P. 3.200 (1880)

$a \times (b \times c) \prec b \times c$

(Ibid.)

$a \times (b \times c) \prec c$

(Ibid.)

$a \times (b \times c) \prec b$

(Ibid.)

$a \times (b \times c) \prec a$

(Ibid.)

$a \times (b \times c) \prec a \times b$

(Ibid.)

$a \times (b \times c) \prec (a \times b) \times c$

(Ibid.)

$(a \times b) \times c = (a \times c) \times (b \times c)$

(Ibid.)

$(a \prec b) \times (x \prec y) \prec \prec (a \times x \prec b \times y)$

(Ibid.)

$(c \prec a \times b) = (c \prec a) \times \times (c \prec b)$

(Ibid.)

[29] Esta fórmula, al igual que los teoremas 14, 15, 18, 19, 20, 21, 23, 24 que expresan relaciones entre clases reciben naturalmente una interpretación enunciativa. Se podría no obstante intentar una traducción conjuntista razonando sobre los gráficos de las relaciones.

(15) $(c \prec a + b) = \Sigma\{(p \prec a) \times (q \prec b)\}$ [30] donde $p + q = c$ (Ibid.)

$(a \times b \prec c) = \Sigma\{(a \prec p) \times (b \prec q)\}$ donde $c = p \times q$ (Ibid.)

b) Otros teoremas:

(16) $(a \times b) + c = (a + c) \times (b + c)$ C.P. 3.4 (1867)

(17) Si $a \prec b$ entonces $\bar{b} \prec \bar{a}$ [31] C.P. 3.91 (1870)

(18) $(b \prec c + a) \prec (\bar{a} \prec c + \bar{b})$ C.P. 3.201 (1880)

(19) $(a \times b \prec c + d) = (a \times \bar{d} \prec c + \bar{b})$ [32] (Ibid.)

(20) $\{x \prec (y \prec z)\} = \{y \prec (x \prec z)\}$ C.P. 3.182 (1880)

(21) $\{(x \overline{\prec} y) \overline{\prec} z\} = \{(x \overline{\prec} z) \overline{\prec} y\}$ C.P. 3.197 (1880)

(22) $(x + y) \times (x + z) = x + (y \times z)$ C.P. 3.81 (1870)

(23) $(a + b \prec a) = (b \prec a \times b)$ [33] C.P. 3.200 (1880)

---

[30] SCHRÖDER propone que este teorema se escriba bajo la forma:

$$c \prec (a + b) = \sum_{p,q} (p + q = c) \times (p \prec a) \times (q \prec b)$$

$$(a \times b \prec c) = \sum_{p,q} (p \times q = c) \times (a \prec p) \times (b \prec q)$$

(cf. *op. cit.*, II, p. 297)

[31] En C.P. 3.186 se ofrece una presentación diferente.

[32] PEIRCE veía en esta fórmula la esencia de la negación. Se verá la importancia de las fórmulas (18) y (19) cuando se estudie el método propuesto por PEIRCE para resolver problemas en lógica no relativa (Cf. en particular 3.211). SCHRÖDER (*op. cit.*, I, pp. 363-364) estudia estas fórmulas bajo la forma: $(a \times b) \prec c = a \prec \bar{b} + c$. Y observa que esta expresión presenta la recíproca de las definiciones del producto y de la suma, pues, mientras que estas últimas muestran cómo una inclusión, cuyo atributo es un producto y cuyo sujeto es una suma, puede ser fraccionado en inclusiones más simples, el teorema arriba citado indica qué cambios se pueden operar en una inclusión en la cual el sujeto es un producto y el atributo una suma. No hay mejor manera de subrayar la importancia de este teorema.

[33] Esta fórmula es una transformación hecha por PEIRCE de las dos proposiciones de SCHRÖDER, tal como el propio PEIRCE hace notar (Cf. C.P. 3.200).

(24) $(a \prec b + x) \times (a \times x \prec b) = (a \prec b)$[34] (Ibid.)

(25) $(a + x) \times (b + \bar{x}) = (a \times \bar{x}) + (b \times x)$
C.P. 3.202 (1880)

Habría que añadir las nuevas fórmulas utilizadas para la transformación de las ecuaciones lógicas:

(26) $\phi x = (\phi 0 + x) \times (\phi 1 + \bar{x})$[35]
C.P. 3.9 (1867)

(27) $(\phi x = 1) \prec (\phi 0 + \phi 1 = 1)$
C.P. 3.12 (1867)

A estas fórmulas descubiertas y demostradas por PEIRCE[36] podrían añadirse las fórmulas ya utilizadas antes que él, pero de las cuales ha dado una nueva demostración en su obra:

(28) $x = x + x$ C.P. 3.200 (1880) $\quad x \times x = x$ C.P. 3.200 (1880)

(29) $a + b = b + a$ (Ibid.) $\quad a \times b = b \times a$ (Ibid.)

(30) $(a + b) + c = a + (b + c)$[37] (Ibid.) $\quad a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$ (Ibid.)

---

[34] Se trata, dice PEIRCE, de una generalización de un teorema de GRASSMANN (Cf. *Die Begriffslehre oder Logik. II. Buch der Formenlehre oder Mathematik* (Stettin: 1872).

[35] Al comparar esta fórmula con la expresión clásica

$$\phi x = (\phi 1 \times x) + (\phi 0 \times \bar{x})$$

se halla la fórmula siguiente:

$$(\phi 0 + x) \times (\phi 1 + \bar{x}) = (\phi 1 \times x) + (\phi 0 \times \bar{x})$$

donde, al sustituir $\phi 1$ por a y $\phi 0$ por b.
se obtiene la fórmula:

$$(b + x) \times (a + \bar{x}) = (a \times x) + (b \times \bar{x})$$

del mismo tipo que la fórmula (25).

[36] A las cuales, para ser completos, tendríamos que añadir las fórmulas utilizadas en el cuadro del cálculo enunciativo que tendremos ocasión de estudiar en la sección siguiente.

[37] "Las pruebas... de la ley de asociatividad son, a mi juicio, uno de los más bellos resultados del Sr. PEIRCE (E. SCHRODER, *op. cit.*, I, p. 257).

(31) $\overline{a + b} = \bar{a} \times \bar{b}$ C.P.3.203 (1880) $\qquad \overline{a \times b} = \bar{a} + \bar{b}$ C.P. 3.203 (1880)

(32) $(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$ C.P. 3.200 (1880)

Si se compara el tomo I de *Vorlesungen über die Algebra der Logik* de SCHRÖDER con el artículo "On the Algebra of Logic" de PEIRCE, aparecido diez años antes, inevitablemente nos sorprenderán las estrechas semejanzas entre las dos maneras de tratar el cálculo de clases. Ambos aceptan al principio las mismas "definiciones". Pero, sobre todo, ambos ponen el acento sobre la importancia que reviste la "definición" de la suma y del producto a partir de la inclusión. Indudablemente, tal definición ya existía en la obra de H. MacCOLL[38]. Pero la gran novedad de PEIRCE consistirá en erigirla en definición fundamental.

La mayoría de los teoremas de PEIRCE son recogidos por SCHRÖDER que los completa por medio de nuevos teoremas o propone nuevas demostraciones de los teoremas ya demostrados por PEIRCE. SCHRÖDER rechazará sin embargo una parte de los teoremas que se refieren a la distributividad. Se sabe que en 1880 no dió demostraciones de las fórmulas (16) y (32), contentándose con decir que *"era demasiado fastidioso dar una demostración"* (C.P. 3.200). En 1890 SCHRÖDER creyó haber demostrado que las fórmulas

$$(x + y) \times z \prec (x \times z) + (y \times z)$$
$$(x + z) \times (y + z) \prec (x \times y) + z$$

no podían ser deducidas de los principios silogísticos[39]. PEIRCE, al haber extraviado la demostración que había puesto a punto en 1880, aprobó las palabras de SCHRÖDER[40]. Hasta 1904 no enviará a E.V. HUNTINGTON[41] la demostración, una vez encontrada. Esta iba a ser utilizada por HUNTINGTON en su demostración de la ley distributiva aparecida ese mismo año[42].

BIRKHOFF, cuando señala que las fórmulas utilizadas por PEIRCE en su demos-

---

[38] H. MacCOLL: "The Calculus of Equivalent statements and integration limits", *Proc. of the London Math. Soc.* IX, X, XI (1877/1880). Es de notar que las variables aquí conciernen a proposiciones y no a clases y que se trata por ende de la implicación y no de la inclusión.

[39] Cf. SCHRÖDER, *op. cit.*, I. parag. 12

[40] "Parece que $(a + b) \times c \prec (a \times c) + (b \times c)$ no puede demostrarse a partir de las definiciones" escribía PEIRCE al margen de su artículo de 1880 (Cf. C.P. 3.200, nota del editor; Cf. también C.P. 3.384, n. 1).

[41] Carta de 14 de febrero de 1904 (Cf. C.P. 3.200, nota del editor).

[42] E.V. HUNTINGTON, "Sets of Independent Postulates for the Algebra of Logic", *Transactions, American Mathematical Society*, V (1904). Se puede encontrar una presentación clara de la demostración de PEIRCE en el libro de C.I. Lewis, *A Survey of Symbolic Logic* (1960), p. 128.

tración de la distributividad resultan ser los postulados de los retículos y de los semi-retículos[43], insinúa que PEIRCE pensaba que todos los retículos eran distributivos[44]. Semejante conclusión nos parece difícil de admitir. Por una parte, PEIRCE sostuvo durante largo tiempo que SCHRÖDER había demostrado la imposibilidad de derivar la ley distributiva en la lógica silogística. Por otra parte, cuando PEIRCE encontró su demostración de la distributividad, continuó utilizando los principios de negación que debían ser empleados al mismo tiempo que las fórmulas arriba citadas, de modo que la demostración de PEIRCE resultó, en 1904, estar en dependencia de los postulados 8 y 9 de HUNTINGTON. Todos estos hechos no justifican pues en modo alguno la conclusión de BIRKHOFF. Además, nos parece difícil hablar de retículos en PEIRCE: si bien se encuentran en su lógica todos los elementos necesarios para la construcción de retículos, no se encuentra por el contrario ninguna formulación de la idea de retículo. Por lo menos no hemos encontrado tal idea en los ensayos publicados hasta hoy en los *Collected Papers.*

Al terminar este rápido examen del álgebra peirciana de la lógica, hay que decir una palabra del original método propuesto por PEIRCE para la resolución de problemas en lógica de términos no relativos. Este método puede analizarse, según PEIRCE, en cinco etapas.

1.ª Etapa:

Habida cuenta de la definición de la igualdad, se expresan todas las premisas por medio de la cópula inclusiva $-<$ y $=<$.[45]

2.ª Etapa:

Se *"desarrolla"* cada sujeto dándole la forma de una suma de productos y cada predicado dándole la forma de un producto de sumas. El método propuesto por PEIRCE es el siguiente: *"Para hacer que aparezcan los componentes elementales (primeros factores) de una expresión, tomar un producto cualquiera (una suma cualquiera) de todas las diferentes letras de ésta, tomando cada una, sea positiva sea negativamente (es decir con raya por encima). Por medio de las fórmulas fundamentales:*

$$X \times Y -< Y -< Y + Z$$

examinar si el producto (la suma) considerada es un sujeto (predicado) de cada uno

---

[43] Las fórmulas utilizadas por PEIRCE son en efecto:

- por un lado las fórmulas dobles (1) y (2) arriba citadas
- por otro lado las "definiciones" directas del producto y de la suma.

[44] G. BIRKHOFF, *Lattice Theory*, 3.ª ed. (Providence: 1967), p. 9, nota.

[45] SCHRÖDER hace observar que PEIRCE no emplea las inclusiones negadas más que en las 1.ª y 3.ª etapas y que parece olvidar esta posibilidad de expresión en las otras etapas (*op. cit.*, I, p. 574).

de los factores (componentes) de la expresión dada. En este caso y solamente en este caso, tenemos un componente elemental (factor primero) de esta expresión. Procédase de esta suerte hasta descubrir tantos componentes elementales (primeros factores) como encierra la expresión" (C.P. 3.207). Este número viene dado por la fórmula $2^m + n - mp - p$ donde m representa el número de letras diferentes empleadas en la expresión (no considerando diferentes una letra y su negación); n el número total de letras (semejantes o diferentes) y p el número de factores (términos) de la expresión (Cf. C.P. 3.207).

Así, si se quiere descomponer $x + (y \times z)$ en factores primeros tenemos (Cf. C.P. 3.208):

$$m = 3 \qquad n = 3 \qquad p = 2$$

Tendremos pues 3 factores primeros. De 8 sumas posibles de 3 letras (tomadas en un conjunto de 6 símbolos $x, y, z, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$), sólo están permitidas las que pueden ser tomadas como predicados de cada uno de los dos términos de la expresión. A saber:

$x + y + z$ ya que $x \prec x + y + z$ y $y \times z \prec x + y + z$

$x + y + \bar{z}$ ya que $x \prec x + y + \bar{z}$ y $y \times z \prec x + y + \bar{z}$

$x + \bar{y} + z$ ya que $x \prec x + \bar{y} + z$ y $y \times z \prec x + \bar{y} + z$

Por tanto $x + (y \times z) = (x + y + z) \times (x + y + \bar{z}) \times (x + \bar{y} + z)$.[46]

Si se quisiera desarrollar la expresión:

$$(\bar{a} + b + c) \times (a + \bar{b} + \bar{c}) \times (a + b + c)$$

pero esta vez bajo la forma de suma de productos tendríamos:

$$m = 3$$
$$n = 9$$
$$p = 3$$

y por tanto cinco *"componentes elementales"*. De ocho productos posibles de 3 letras, sólo se excluyen:

$$a \times \bar{b} \times \bar{c}$$

---

[46] SCHRÖDER (*op. cit.*, I, p. 575) hace notar con razón que esta fórmula, gracias al teorema (16) puede simplificarse en:

$$(x + y) \times (x + z)$$

$$\bar{a} \times b \times c$$
$$\bar{a} \times \bar{b} \times \bar{c}$$

Se tendrá pues la fórmula general:

$$(\bar{a} + b + c) \times (a + \bar{b} + \bar{c}) \times (a + b + c) = (a \times b \times c) + (a \times b \times \bar{c}) + (a \times \bar{b} \times c) + (\bar{a} \times b \times \bar{c}) + (\bar{a} \times \bar{b} \times c)$$

Es de notar en esta segunda etapa la importancia que otorga PEIRCE a las formas normales disyuntivas y conjuntivas. Si las primeras formas normales disyuntivas se remontan a la fórmula de desarrollo de BOOLE, puede decirse que su extensión es obra de PEIRCE, que por otra parte es el primero en introducir verdaderamente las formas normales conjuntivas[47]

3.ª Etapa (Cf. C.P. 3.209):

Conforme a la definición de la suma y del producto se transforman las proposiciones complejas en proposiciones simples por medio de las fórmulas siguientes[48]:

$$(x + y) \prec z = (x \prec z) \times (y \prec z)$$
$$x \prec (y \times z) = (x \prec y) \times (x \prec z)$$
$$(x + y) \overline{\prec} z = (x \overline{\prec} z) + (y \overline{\prec} z)$$
$$x \overline{\prec} (y \times z) = (x \overline{\prec} y) + (x \overline{\prec} z)$$

Toda premisa que hasta aquí debía tener la forma

$$s + s' + s'' + \cdots \prec p \times p' \times p'' \times \cdots$$

podrá entonces escribirse bajo la forma de inclusiones simultáneas más simples:

$$(s \prec p)$$
$$(s \prec p')$$
$$(s \prec p'')$$

---

[47] Los términos "Disjunktive normal form" y "Konjunktive normal form" se encuentran por primera vez en la obra de H. BEHMANN (en un artículo aparecido en *Mathematische Annalen*, 86 (1922), pp. 163-229).

[48] En la escritura de lo que sigue se ve que es necesario sustituir el signo de la igualdad que da PEIRCE por el funtor de la equivalencia, puesto que los dos miembros unidos por el signo = no son clases sino relaciones entre clases.

$$(s' \prec p)$$
$$(s' \prec p') \ldots \text{etc.} \ldots$$

4.ª Etapa:

Esta regla sirve para eliminar un símbolo. Si x es el símbolo que debe eliminarse, nos hacen falta entonces dos proposiciones, una que contenga x en el sujeto (o $\bar{x}$ en el predicado) y la otra, que, a la inversa, contenga $\bar{x}$ en el sujeto (o x en el predicado). Si por ejemplo se tiene:

$$\alpha)\ c \times x \prec d \qquad \text{o} \qquad c \prec d + \bar{x}$$
$$\beta)\ a \times \bar{x} \prec b \qquad\qquad a \prec b + x$$

entonces, por la transitividad de la cópula se puede eliminar x y obtener

$$a \times c \prec b + d$$

(Cf. C.P. 3.210)[49]

La regla de *eliminación* es por tanto simple: se multiplican los sujetos y se suman los predicados dejando de lado los símbolos por eliminar.

5.ª Etapa (Cf. C.P. 3.211):

Con esta etapa y la siguiente vamos a lograr la resolución de un sistema de proposiciones con una incógnita x.

En la quinta etapa se consiguen aislar para cada proposición todos los sujetos y todos los predicados de x (con tal de que sujeto y predicado no contengan la letra x), utilizando los teoremas (18) y (19). Si resulta necesario pasar al otro lado de la

---

[49] La demostración dada por SCHRÖDER consiste en reducir las dos inclusiones a una igualdad. De esta manera las fórmulas (α) y (β) pueden escribirse:

$$c \times \bar{d} \times x + a \times \bar{b} \times \bar{x} = 0$$

lo cual da lugar a $a \times \bar{b} \times c \times \bar{d} = 0$. Ahora bien, se sabe que la inclusión $a \prec b$ puede escribirse $a \times \bar{b} = 0$; por tanto $a \times c \prec b + d$ (*op. cit.*, I, pp. 576-577). Debe notarse que si se encuentra al mismo tiempo x en el sujeto y no x en el atributo, por ejemplo

$$a \times x \prec b + \bar{x}$$

tal expresión, conforme al teorema (19), puede simplificarse en:

$$a \times x \prec b \quad \text{o} \quad a \prec b + \bar{x}$$

inclusión un símbolo que esté aislado en uno de los lados, basta recordar que $a \prec b$ puede escribirse:

$$1 \times a \prec b \qquad\qquad a \prec b + 0$$

por tanto

$$1 \prec \bar{a} + b \qquad\qquad a \times \bar{b} = 0$$

6.ª Etapa (Cf. C.P. 3.212):

Se reunen finalmente las inclusiones obtenidas, que tienen la incógnita x como predicado (o como sujeto), en una sola inclusión que tenga x como predicado (o como sujeto) y la suma de los sujetos como sujeto final (o el producto de los predicados como predicado final), utilizando para ello el esquema de la definición del producto y de la suma[50].

Si se compara el método de PEIRCE con el de BOOLE se puede notar que, en BOOLE, las diferentes premisas se reducen a una ecuación que luego se fracciona, mientras que en PEIRCE las premisas son desde el principio analizadas según sus ramificaciones más finas, dejando para luego el agrupamiento y la simplificación. PEIRCE presentaba su método como más natural y simple que el de sus predecesores (Cf. C.P. 3.204). SCHRÖDER lo subraya en 1890 con estas palabras: *"La ventaja natural del método de PEIRCE sobre el método de BOOLE consiste en el hecho de que no obra, como éste, con las igualdades sino con las inclusiones, que se ocupa pues de sujetos y atributos que se adaptan perfectamente a las funciones del juicio en el pensamiento corriente*[51]." La ventaja de la simplicidad parece menos evidente. Hasta 1890 SCHRÖDER, aun conservando la manera de razonar de PEIRCE, no introducirá en el método importantes simplificaciones. No podemos emprender su examen en el marco de este estudio[52] pero las observaciones que hemos podido hacer hasta aquí, a nuestro jucio, muestran de forma suficiente la profunda influencia ejercida por el álgebra peirciana de la lógica sobre el cálculo de clases de SCHRÖDER. Al generalizar el uso del + inclusivo, al rechazar definitivamente las operaciones inversas y las operaciones aritméticas, al introducir la inclusión como relación fundamental en un cálculo a menudo desarrollado simétricamente, al desarrollar el uso de las formas normales conjuntivas y disyuntivas, al transformar los métodos booleanos de eliminación y de resolución, el cálculo de clases de PEIRCE se aleja del matematicismo booleano y abre la vía de la gran síntesis schröderiana de 1890.

---

[50] Para ilustrar el método podemos referirnos al tratamiento hecho por PEIRCE (C.P. 3.213) del problema de BOOLE (*An investigation of the laws of thought, on which are founded the mathematical theories of Logic and probabilities* (London: 1854), pp. 146-149).

[51] SCHRÖDER, *op. cit.*, I, p. 584.

[52] Nos referiremos a la discusión de SCHRÖDER, *op. cit.*, I, pp. 584-592.

1.2. El Cálculo Enunciativo

1.21. Del Cálculo de Clases al Cálculo de enunciados

Pero el álgebra peirciana de la lógica abre al mismo tiempo el camino a los trabajos de SCHRÖDER de 1891,[53] en la medida en que sus elementos pueden recibir una nueva interpretación y en la medida en que puede enunciarse un principio adicional que transforma el cálculo de clases en cálculo de proposiciones.

1880 y 1885[54] son los años en que PEIRCE parece llevar a cabo, de manera explícita, estos dos pasos decisivos. BOOLE ya había sugerido, como segunda interpretación de su álgebra, que los símbolos de clases de objetos (*elective symbols*) fuesen construidos como representando clases de momentos en que los enunciados se verifiquen. Por otra parte, BOOLE había provisto a su álgebra de una tercera interpretación según la cual los valores de las variables se limitan a los números 1 y 0. Para construir un cálculo proposicional a partir del álgebra de BOOLE, PEIRCE no tenía pues más que aceptar la segunda interpretación pero con la modificación que sugiere la tercera interpretación, de tal manera que las variables proposicionales no puedan tomar más que dos valores[55]. Tal modificación iba a consistir en añadir al cálculo de BOOLE un nuevo principio, que PEIRCE enuncia claramente en 1885 y que aparece como una forma algebraica de la ley del tercero excluso: *"Representemos las proposiciones*[56] *por medio de cantidades. Sean v y f dos valores constantes y sean v y f los valores de las cantidades que representan respectivamente proposiciones verdaderas y falsas. De esta manera, si x es una proposición, la verdad o la falsedad de x se escribe:*

---

[53] SCHRÖDER, *op. cit.*, II/1 (Leipzig: 1891).

[54] "On the Algebra of Logic", *The American journal of Mathematics*, III (1880), pp. 15-57 y "On the Algebra of Logic. A contribution to the philosophy of Notation", *The American Journal of Mathematics*, VII, n.º 2 (1885), pp. 180-222.

[55] Como subraya C.I. LEWIS, persiste cierta ambigüedad en el tratamiento booleano de las proposiciones llamadas "secundarias". La idea de ciertos enunciados que son verdaderos en algunos momentos y falsos en otros lleva a pensar que BOOLE no distingue una "función enunciativa" de un "enunciado" propiamente dicho (Cf. C.I. LEWIS and C.H. LANGFORD, *Symbolic Logic*, 2.ª ed. (New-York: 1959), p. 17). En BOOLE las variables enunciativas parecen tener como valores posibles los diferentes momentos del tiempo, lo cual las transforma en funciones enunciativas (Cf. también J. DOPP, "La formalisation de la logique", *Revue Philosophique de Louvain*, 50 (1952), p. 543).

[56] En lugar de "proposition" PEIRCE utiliza a veces el término "statement" (Cf. C.P. 4.262). Parece también confundir "proposition" y "sentence" (Cf. C.P. 3.461 y 4.481). Sin embargo parece que a veces quiere distinguir estos dos últimos términos cuando escribe: "Dos enunciados (sentences) diferentes que tengan el mismo sentido son precisamente expresiones de la misma aserción" (C.P. 4.354, n. 1). La noción de "assertion" está explícitamente unida en la obra de PEIRCE a la de "proposition", la cual se opone a la expresión lingüística del juicio (Cf. C.P. 5.424 nota 1). De la "sentence" a la "proposition" habrá por tanto la misma distancia que separa en C.P. 2.292 el "word" del meaning", es decir, lo sintáctico de lo semántico. Topamos aquí con la distinción hoy reconocida en lengua inglesa entre "sentence" y "proposition". Debe no obstante notarse que hoy se distingue generalmente "statement" de "proposition", el primero de los cuales está reservado para la asociación de una "proposition" y una "sentence" (Cf. *Logique et Analyse* (Juin 1968) p. 261).

$$(x - f)(v - x) = 0"$$

(C.P. 3.366)

De esta forma la proposición es definida esencialmente por su valor de verdad: *"Según la lógica ordinaria, una proposición es o verdadera o falsa, con exclusión de cualquier otra distinción. Se trata de una concepción descriptiva, como dirían los geómetras. La concepción métrica consistiría en afirmar que toda proposición es más o menos falsa y que ésta es una cuestión de grado. Por el momento adoptamos la primera interpretación"* (C.P. 3.365; Cf. 3.369).[57]

Bien es verdad que PEIRCE no fue el primero en pergeñar una versión moderna del cálculo enunciativo. Ya FREGE, en 1879,[58] nos había ofrecido un estudio sistemático de tal cálculo donde éste aparecía como momento originario de toda la lógica. Pero los descubrimientos de PEIRCE se hicieron con independencia de los de FREGE que permanecieron ignorados largo tiempo hasta que B. RUSSELL llamó la atención sobre ellos[59]. Por el contrario, PEIRCE fue sin duda influido por MacCOLL que empieza a publicar sus investigaciones desde 1877 y en cuya obra la lógica proposicional se emancipa muy claramente del cálculo de clases, como lo testifican las definiciones aparecidas en el Vol. IX de los *Proceedings of the London Mathematical Society*[60]. Pero se sabe que PEIRCE había tenido conocimiento de los primeros trabajos de MacCOLL, a los cuales hace alusión[61] repetidamente en su artículo de 1880 (Cf. C.P. 3.182, n. 2 y 3.199, n. 2). Pero los resultados a los que llega PEIRCE superan considerablemente los de Mac COLL, por lo menos si se tiene

---

[57] Se vuelve a encontrar el 1902 la misma definición aplicada a las "cantidades" de un álgebra bivalente (Cf. C.P. 4.278, extraído de *Minute Logic*). En este ensayo se encuentra una importante formulación sintáctica de un cálculo binario, concebido como el más simple de todos los cálculos no triviales (Cf. C.P. 4.227-323). No podemos estudiarlo en el marco de esta investigación. PEIRCE se proponía hacer una aplicación del mismo a la lógica formal en un capítulo que no fue escrito (Cf. C.P. 4.227).

[58] FREGE, *Begriffschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens* (Halle: 1879).

[59] PEIRCE no parece haber conocido en absoluto a Frege, y seguramente por ello los lógicos alemanes le parecían caracterizarse por la confusión de lo lógico y lo psicológico: "La ineptitud para comprender la verdadera naturaleza de la necesidad lógica y la asimilación de esta última a un impulso psicológico caracterizan a todos los lógicos alemanes, excepción hecha de los herbartianos" (C.P. 4.353). En C.P. 2.152 y ss. opone los lógicos ingleses a los lógicos alemanes.

[60] MacCOLL, "The Calculus of Equivalent Statements", *Proceedings of the London Mathemaical Society*, IX (1877/1878). En especial la "definición" I de la página 9 nos parece que es una anticipación de la noción de valor de verdad (en la medida en que limita el cálculo a dos valores lógicos) y por tanto ha podido influir a PEIRCE: *"Definición I.–Convengamos que un símbolo cualquiera (tal como A, B, C, etc.) representa las proposiciones que figuran en una tabla para la comodidad de las referencias. Entonces la ecuación A = 1 afirma que la proposición A es verdadera; La ecuación A = 0, que la proposición a es falsa; y la ecuación A = B que A y B son proposiciones equivalentes."* Por tanto es en la obra de MacCOLL y no en la de PEIRCE, a pesar de lo que piensa A. CHURCH (*op. cit.*, p. 25, n. 67), donde podría encontrarse el primer uso explícito de dos valores de verdad.

[61] MacCOLL se apoya, por cierto, en estas alusiones para reivindicar la prioridad de la utilización moderna de la implicación (Cf. Carta de MacCOLL aparecida en *Nature* (21 de abril de 1881), pp. 578-579).

en cuenta lo profundamente que PEIRCE vio la naturaleza de la implicación, el descubrimiento de los procedimientos originales –deductivos y matriciales– utilizados por la totalidad del cálculo enunciativo y la tentativa de PEIRCE –primera en la historia de la lógica– de unificar el cálculo enunciativo gracias a un funtor único.

1.22. La naturaleza de la implicación

Para PEIRCE la implicación material que utiliza el cálculo proposicional es un caso especial de una cosa más amplia que llama condicional *"ordinario"*. Este establece que *siendo i uno cualquiera de los estados de cosas posibles, o bien A_i es falso, o bien B_i es verdadero"* (C.P. 3.444).[62] Pero el dominio de los *"estados de cosas"* o casos posibles puede reducirse al caso solamente real y el condicional ordinario se convierte entonces en el condicional material: *"La gama de los posibles es, en un caso, considerada extensivamente, en el otro restrictivamente. En el caso que nos ocupa, se limita al estado real de cosas. Aquí, por consiguiente, la proposición:*

$$a \prec b$$

es verdadera si a es falso o si b es verdadero, pero es falsa si a es verdadero cuando b es falso" (C.P. 3.375).[63] Cosa que PEIRCE expresa de otra manera simbolizando por medio de *i* la noción de *"estado real de cosas": "La implicación de inesse, "Si A es verdadero, entonces B es verdadero", se expresa como sigue: i designa el estado real de cosas, A_i significa que, en el estado real de cosas, A es verdadero, B_i que, en el estado real de cosas, B es verdadero; decimos entonces: "Si A_i es verdadero, entonces B_i es verdadero", o lo que es igual, "o bien A_i es falso, o bien B_i es verdadero" "* (C.P. 3.444).

El condicional *"ordinario"* se parece, bajo algunos aspectos, al condicional que en adelante se llamará "estricto", por lo menos en la medida en que tiende a introducir la idea de *"necesidad lógica"* (C.P. 3.375). Posee en sí misma un elemento de cuantificación pero si este último, en vez de referirse a los estados de cosas posibles, se aplica a los individuos, una nueva forma de implicación aparece, la implicación que más tarde se llamará "formal", y que se expresa en el ejemplo de 1880: *"Decir que todos los hombres son mortales equivale a decir que si todo hombre posee un atributo cualquiera, entonces un mortal posee dicho atributo"* (C.P. 3.175), cosa que PEIRCE explicita de forma más completa en 1896: *"Expresemos ahora la proposición categórica: Todo hombre es sabio." Diremos aquí que m_i significa que el*

---

[62] En el artículo "The Regenerated Logic", *The Monist*, VII (1896), pp. 19-40.

[63] Es interesante notar que PEIRCE emplea aquí, para la representación de la implicación, el mismo signo que para la inclusión. La razón de ello debe sin duda buscarse en el hecho de que la inferencia es definida, de manera totalmente moderna, en términos de inclusión entre "estados de cosas" donde las proposiciones son verdaderas (Cf. C.P. 3.165) y que la inferencia misma no está disociada de la implicación como se verá más adelante.

objeto individual, i, es un hombre y w_i que es sabio. Afirmaremos entonces que "al considerar un individuo cualquiera, i, tomado del universo, o bien no es un hombre o bien es sabio". En otras palabras, cualquiera que sea hombre es sabio. O incluso "cualquier cosa que sea lo que represente i, o bien m_i es falso o bien w_i es verdadero" " (C.P. 3.445).

1.23. Los Procedimientos Deductivos

Dos son los procedimientos deductivos que emplea PEIRCE en el marco de un cálculo enunciativo de tipo implicativo, uno expuesto en el artículo de 1880 (Cf. C.P. 3.182-197) que está emparentado con un sistema de deducción natural[64], y otro desarrollado axiomáticamente en el artículo de 1885.

En la versión de 1880 PEIRCE empieza primero por poner como axioma inicial la ley de identidad:

$$x -\!\!< x \quad [65] \tag{1}$$

Luego enuncia una regla según la cual la implicación $y -\!\!< z$ se sigue de una premisa x si y solamente si z se sigue también de x, siendo entonces igualmente dada la premisa y. PEIRCE lo expresa como sigue: *"las dos inferencias*[66]

$$x\,,\, y \therefore z \quad \text{y} \quad x \therefore y -\!\!< z \tag{2}$$

son equivalentes" (C.P. 3.182).[67] Lo cual es un enunciado que cubre a la vez la regla de introducción de la implicación y su recíproca (regla de eliminación de la implicación en la consecuencia). PEIRCE escribe que esta regla y la fórmula (1) reflejan *"la identidad de la relación expresada por la cópula y la de consecuencia"* (C.P. 3.182).[68] Pero PEIRCE identifica también la cópula de una condicional con

---

[64] A pesar de la presencia de un axioma de la forma $x -\!\!< x$. Pero sabido es que los sistemas LJ y LK de GENTZEN lo utilizan (Cf. GENTZEN, *Recherches sur la déduction Naturelle* (París: P.U.F. 1955), p. 43).

[65] Para la numeración de las fórmulas emplearemos la de PEIRCE: (1), (2) ... etc. Emplearemos la numeración (1)′, (2)′, (1)″, etc. para las fórmulas de PEIRCE no numeradas o para las que nos veremos obligados a añadir.

[66] Se puede observar que aquí, en la obra de PEIRCE, falta una regla para introducir la relación de deductibilidad. Bien es verdad que en C.P. 3.163 nota que "el paso de la premisa (o conjunto de premisas) P a la conclusión C se efectúa según una costumbre o regla que obra en nosotros". Pero esto no es lógicamente suficiente. Haría falta un conjunto de fórmulas del tipo de las que por ejemplo utiliza GENTZEN cuando quiere introducir la deductibilidad.

[67] Sustituiremos de aquí en adelante el símbolo de la deductibilidad de PEIRCE " $\therefore$ " por "$\vdash$". Si X representa un conjunto de premisas puede escribirse: $X \vdash x -\!\!< y$ si y solamente si $X, x \vdash y$.

[68] Aquí, como en los *Principia Mathematica*, se ve que no hay una distinción claramente afirmada entre los enunciados que son simples axiomas o teoremas y los enunciados que son reglas de deducción, lo cual es fuente de un buen número de ambigüedades. Sin embargo se en-

la cópula silogística, es decir que "x implica y" y "Todo S es P"[69] no representan más que una sola y la misma forma: *"Las proposiciones categóricas y condicionales se expresan de una forma totalmente semejante; y no hay, en mi opinión, absolutamente ninguna diferencia entre ellas. La forma de la relación es la misma"* (C.P. 3.455).[70] PEIRCE llega incluso, en el artículo de 1880, hasta mezclar las proposiciones y los términos en expresiones del tipo $x \prec S$ y $S \prec x$. Si se quiere dar un sentido a estas últimas, se leerán respectivamente "cosa que es S si x", "cosa en que el hecho de ser S implica x".

De la regla (2) PEIRCE deduce (C.P. 3.182) la fórmula:

$$(x \prec (y \prec z)) = (y \prec (x \prec z)) \qquad (3)$$

donde el signo = tiene el sentido de una equivalencia. PEIRCE se contenta con presentar esta fórmula sin dar la demostración. De hecho su deducción es ilegítima pues supone el "modus ponens". Bien es verdad que este último se demuestra en el parágrafo siguiente a partir de una substitución[71] en (1), seguida de una aplicación de (2) pero debiera haber sido puesta inmediatamente después del enunciado de las fórmulas (1) y (2) ya que es necesario para la demostración de (3), como lo expresa el esquema siguiente:

---

cuentra en otros pasajes de PEIRCE un esbozo de distinción entre un nivel teórico y un nivel metateórico. Merece destacarse entre ellos C.P. 2.599, donde PEIRCE opone el "razonamiento" que se "despliega en el nivel de las primeras intenciones" a las "formas de la lógica" que son "construcciones de segunda intención". Las "formas de la lógica", son los "principios directores" (leadings princiciples) que, dice PEIRCE, están "vacíos" (C.P. 2.467) –más tarde dirá "formales" (C.P. 3.148)– y se presentan como simples "reglas para las transformaciones ilativas de los símbolos" (C.P. 2.599). Sin embargo el lenguaje de PEIRCE no siempre es tan riguroso y los "principios directores" a menudo se asimilan a simples proposiciones del cálculo (Cf. C.P. 3.164; 2.463). En el capítulo III se estudiarán detalladamente los importantes desarrollos, tanto algebraicos como gráficos, que son originados, en la obra de PEIRCE, por la noción de "segunda intención".

[69] En el artículo de 1880 las letras mayúsculas *S, P*... representan términos de las minúsculas *x, y*... proposiciones.

[70] Ya expresaba la misma idea desde 1880: "Las formas $A \prec B$, donde A implica B, y $A \prec B$, donde A no implica B, se aplican a la vez a las proposiciones hipotéticas y a las proposiciones categóricas" (C.P. 3.175). Debe notarse, no obstante, que el paso entre estos dos tipos de proposiciones se efectúa por medio de la utilización de una noción de implicación formal, de lo cual además dan testimonio los ejemplos de PEIRCE en estos dos parágrafos.

[71] Substitución que debería haber sido anunciada anteriormente como una regla. Aparece en C.P. 3.185: "Es innecesario señalar que *x, y, z* pueden ser substituida por una letra cualquiera." Semejante formulación es sin duda insuficiente para un cálculo lógico riguroso. Las variables son tratadas en la obra de PEIRCE de una manera intuitiva, como se hace en el álgebra ordinaria. Son, en una palabra, símbolos ambiguos que pueden representar cualquier entidad de una categoría determinada. No solamente PEIRCE no formula explícitamente la regla de substitución, sino que ni siquiera precisa el dominio de variabilidad de las variables. Si bien el enunciado mencionado puede bastar para el cálculo enunciativo, sería insuficiente para un cálculo de predicados. Cabe por cierto preguntarse si PEIRCE tiene clara conciencia de enunciar una verdadera regla de substitución. Lo cual haría que su axioma (1) apareciese aquí más bien como lo que hoy se llama un esquema de axioma.

$$\begin{array}{l} x \prec (y \prec z) \\ y \\ x \\ \hline y \prec z \\ \hline z \end{array}$$

es decir

$$\begin{array}{l} x \prec (y \prec z) \\ y \\ x \\ \hline z \end{array}$$

Tal como es presentada por PEIRCE, la fórmula (3) no podría demostrarse más que a partir del esquema siguiente:

$$\frac{x,\ y \vdash z}{y,\ x \vdash z} \qquad (2)'$$

según el cual las premisas de una inferencia pueden ser consideradas en cualquier orden.

Después de haber obtenido la deductibilidad de y a partir de $x \prec y$ y de x, cosa que puede simbolizarse así:

$$x\ ,\ x \prec y \vdash y \qquad (4)$$

PEIRCE obtiene un resultado particularmente interesante:

$$x,\ x \prec y,\ y \prec z \vdash z \qquad (4''')$$

que se demuestra así:

$$x,\ x \prec y \vdash y \qquad (4') \text{ por } (4)$$

y

$$y,\ y \prec z \vdash z \qquad (4'') \text{ por } (4)$$

La fórmula (4‴) expresa un principio de "cortadura" que podría esquematizarse así:

$$\frac{X \vdash x \quad Y,\ x \vdash y}{X,\ Y \vdash y} \qquad (2'')$$

Es decir, si de un conjunto de premisas X se sigue una conclusión x y si de x con otras premisas Y se sigue y, entonces y resulta de X e Y.

Por (2) la expresión (4‴) se convierte en:

$$\begin{array}{c} x \prec y \ ,\ y \prec z \\ \vdash x \prec z \end{array} \qquad (5)$$

Pueden resumirse los resultados hasta aquí obtenidos por PEIRCE:

$$x \prec x \qquad (1)$$

$$X \vdash x \prec y \text{ si y sólo si } X,\ x \vdash y \qquad (2)$$

a partir de lo cual se obtiene (utilizando la substitución):

$$(x \prec y) \prec (x \prec y) \qquad (1') \text{ por } (1)$$

$$x \prec y,\ x \vdash y \qquad (4) \text{ por } (1) \text{ y } (2)$$

$$(x \prec (y \prec z)) = (y \prec (x \prec z)) \qquad (3) \text{ por } (4)$$

$$x,\ x \prec y,\ y \prec z \vdash z \qquad (4''') \text{ por } (4) \text{ repetido}$$

$$x \prec y,\ y \prec z \vdash x \prec z \qquad (5) \text{ por } (4''') \text{ y } (2)$$

Utilizando la substitución y la separación PEIRCE obtiene a continuación las siguientes fórmulas mixtas:

$$S \prec P \vdash (x \prec S) \prec (x \prec P) \qquad (6) \text{ por } (5) \text{ y } (2)$$

$$S \prec P \vdash (P \prec x) \prec (S \prec x) \qquad (7) \text{ por } (5) \text{ y } (2)$$

$$M \prec P,\ (S \prec P) \prec x \vdash (S \prec M) \prec x \qquad (8) \text{ por } (6) \text{ y } (5)^{72}$$

---

[72] PEIRCE ofrece en C.P. 3.187 dos ilustraciones interesantes de estas fórmulas mixtas. Así el ejemplo dado para (8): "Todos los hombres son mortales. Si ENOCH y ELIAS son mortales, la Biblia se equivoca. Por tanto si ENOCH y ELIAS son hombres, la Biblia se equivoca."

$$S \prec M,\ (S \prec P) \prec x \vdash (M \prec P) \prec x \qquad (9) \text{ por } (7) \text{ y } (5)$$

$$M \prec P,\ x \prec (S \prec M) \vdash x \prec (S \prec P) \qquad (10 \text{ por } (6) \text{ y } (5)$$

$$S \prec M,\ x \prec (M \prec P) \vdash x \prec (S \prec P) \qquad (11) \text{ por } (7) \text{ y } (5)$$

Al traducir todo ello en lenguaje enunciativo[73] puede observarse que PEIRCE emplea el sistema BCI de MEREDITH (1956)[74] con la substitución y la separación, mientras que los axiomas son los siguientes:

1 $\quad (y \prec z) \prec \{(x \prec y) \prec (x \prec z)\}$ Cf. (6)[75]

2 $\quad \{x \prec (y \prec z)\} \prec \{y \prec (x \prec z)\}$ Cf. (3)

3 $\quad x \prec x$ Cf. (1)

Los primeros resultados de PEIRCE parecen confirmar esta interpretación pues se corresponden con los resultados siguientes obtenidos a partir de estos axiomas:

12 $\quad (x \prec y) \prec \{(y \prec z) \prec (x \prec z)\}$ cf. (7) por 2 y 1[76]

13 $\quad (y \prec z) \prec \{((x \prec z) \prec t) \prec ((x \prec y) \prec t)\}$ cf. (8) por 12 y 1

14 $\quad (x \prec y) \prec \{((x \prec z) \prec t) \prec ((y \prec z) \prec t)\}$ cf. (9) por 12

15 $\quad (y \prec z) \prec \{(x \prec (z \prec t)) \prec (x \prec (y \prec t))\}$ cf. (11) por 12 y 1

16 $\quad (x \prec y) \prec \{(z \prec (t \prec x)) \prec (z \prec (t \prec y))\}$ cf. (10) por 1

Pero el sistema de 1880 necesita la utilización de una constante entre los axiomas para definir la negación. Estudiando el silogismo menor indirecto PEIRCE escribe (cf. C.P. 3.191) que si se pone *"lo que no sucede"* en lugar de x en la fórmula:

$$(S \prec P) \prec x$$

se obtiene la negación de $S \prec P$. PEIRCE no tiene aquí ningún símbolo especial para *"lo que no sucede"*. Pero en C.P. 3.198 introduce las constantes ∞ (el 1 de

[73] Semejante traducción no nos parece contraria al espíritu de PEIRCE que, en el mismo artículo, identifica el término con la proposición (Cf. C.P. 3.175). En 1896 presenta el término como una proposición privada de su sujeto: "... Un "término", o nombre de clase, no es para mí más que una proposición con sus... sujetos dejados vacíos o indefinidos" (C.P. 3.440).

[74] Se encontrará una breve presentación del sistema de MEREDITH en A.N. PRIOR, *Formal Logic*, 2.ª ed. (Oxford: 1962), p. 316.

[75] Numeraremos las fórmulas nuevas correspondientes a las de PEIRCE por medio de un número sin paréntesis situado a la izquierda.

[76] Numeraremos con el 12 esta proposición para dejar lugar a los axiomas que serán enunciados seguidamente (para la negación, la conjunción y la disyunción).

BOOLE) y 0 para *"lo posible"*[77] y *"lo imposible"* con las leyes $x \prec \infty$ y $0 \prec x$. Se podría representar por medio de 0, a la manera de WAJSBERG, toda proposición que debe ser falsa pues los valores de verdad de $x \prec 0$ son los de $\bar{x}$:

$$10 = 0$$
$$00 = 1$$

Por eso si escribimos 0 para *"lo que no sucede"*, podremos utilizar la definición dada por PEIRCE del 0 y enunciar como nuevo axioma del sistema:

4 $$0 \prec x$$

de modo que resulta definida la negación de x por:

$$\bar{x} = df\, x \prec 0$$

Para introducir la doble negación se utilizará el principio del tercero excluso, enunciado por PEIRCE bajo la forma:

$$\bar{\bar{x}} \prec x \qquad \text{(C.P. 3.192)}$$

Se empleará pues como nuevo axioma:

5 $$((x \prec 0) \prec 0) \prec x \qquad \text{cf. (18)}$$

Los principales teoremas que se siguen de los nuevos axiomas son los siguientes:

17 $$(x \prec y) \prec ((y \prec 0) \prec (x \prec 0)) \qquad \text{cf. (16) por 12}$$

18 $$(x \prec (y \prec 0)) \prec (y \prec (x \prec 0)) \qquad \text{cf. (19) por 2}^{78}$$

19 $$x \prec ((x \prec 0) \prec 0) \qquad \text{cf. (17) por 1, 2 y modus ponens}^{79}$$

20 $$((x \prec 0) \prec y) \prec ((y \prec 0) \prec x) \qquad \text{cf. (20) por 5, 17, 19}^{80}$$

21 $$((x \prec 0) \prec (y \prec 0)) \prec (y \prec x) \qquad \text{cf. (21) por 4, 17, 19}$$

---

[77] Debería decirse lo "necesario".

[78] La demostración que proponemos nos parece que se acomoda a la observación añadida por PEIRCE en septiembre de 1880 según la cual de la definición de la negación se sigue (19) en particular (Cf. C.P. 3.193, n. 1).

[79] En PEIRCE se trata de un axioma.

[80] PEIRCE escribe (C.P. 3.193) que (20) se deriva de (18) y (16). De hecho también hay que utilizar el principio de contradicción (17). Utiliza por cierto éste último para demostrar (21). En una nota añadida en septiembre de 1880 (Cf. C.P. 3.193, n. 1) PEIRCE señala que

Pero si se recuerda que, en el artículo de 1880, PEIRCE definía la adición y la multiplicación lógicas a partir de la relación $-\!\prec$,[81] se puede entonces completar su versión del cálculo enunciativo añadiendo como nuevos axiomas:

6 $$(x -\!\prec z) -\!\prec ((y -\!\prec z) -\!\prec ((x + y) -\!\prec z))$$

7 $$((x + y) -\!\prec z) -\!\prec (x -\!\prec z)$$

8 $$((x + y) -\!\prec z) -\!\prec (y -\!\prec z)$$

9 $$(x -\!\prec y) -\!\prec ((x -\!\prec z) -\!\prec (x -\!\prec y \times z))$$

10 $$(x -\!\prec y \times z) -\!\prec (x -\!\prec y)$$

11 $$(x -\!\prec y \times z) -\!\prec (x -\!\prec z)$$

PEIRCE, sin embargo, parece estar principalmente interesado en la elaboración de un cálculo enunciativo de tipo implicativo. Y el artículo de 1885 intentará proporcionar una nueva formulación de ello. Nueva en primer lugar por las exigencias de rigor y de acabamiento que PEIRCE manifiesta desde el principio: *"En este artículo me propongo elaborar un álgebra capaz de tratar todos los problemas de la lógica deductiva, y también, a lo largo de su desarrollo, indicaré qué tipos de signos deberán necesariamente usarse en cada etapa de la elaboración. De esta manera alcanzaré tres objetivos. El primero es extender a la totalidad de su dominio propio los poderes del álgebra lógica. El segundo es ilustrar los principios en que se funda toda notación algebraica. El tercero es enumerar los tipos esencialmente diferentes de deducción necesaria"* (C.P. 3.364). Y PEIRCE añade que puede ofrecer *"un método por el cual puede obtenerse cualquier conclusión legítima y evitar cualquier error"* (C.P. ibid.) y concibe la esperanza de que su trabajo *"podrá constituir una primera etapa en la resolución de uno de los problemas mayores de la lógica, a saber, la definición de un método de descubrimiento de los métodos en matemáticas"* (C.P. Ibid.)[82]. En lo que al cálculo de proposiciones se refiere hay que ver sin duda,

---

puede derivarse (20) y (21) de la definición de la negación. Se trata de hecho de un error pues se necesita el axioma 5. Por otra parte sería fácil mostrar que 5 y 20 son equivalentes:

20 $$((x -\!\prec 0) -\!\prec y) -\!\prec ((y -\!\prec 0) -\!\prec x)$$

$$(y -\!\prec 0) -\!\prec (((x -\!\prec 0) -\!\prec y) -\!\prec x) \text{ por 2}$$

$$(0 -\!\prec 0) -\!\prec (((x -\!\prec 0) -\!\prec 0) -\!\prec x) \text{ por sustitución}$$

Por tanto $$((x -\!\prec 0) -\!\prec 0) -\!\prec x$$

[81] En la segunda parte del artículo en cuestión.

[82] Resulta que aquí PEIRCE define la finalidad misma de lo que llamará la "Retórica especulativa". Sabido es que, en la obra de PEIRCE, la lógica filosófica, que él llama "semiótica" (C.P. 1.444) y que es la ciencia de las leyes generales de los signos" (C.P. 1.191), estaba dividida en tres grandes partes: la "gramática especulativa" o "teoría general de la naturaleza y del sentido de los signos" (Ibid.); la "lógica crítica o "teoría de las condiciones generales de la referencia

en los largos desarrollos de los parágrafos 3.365 al 375, una respuesta concreta a estas nuevas exigencias. Efectivamente, PEIRCE desarrolla en ellos las dos ideas primitivas a partir de las cuales se despliega todo su sistema: la idea de proposición reducida a su valor de verdad y la de implicación material –ideas que ya hemos presentado más arriba y sobre las cuales no volveremos. En la misma perspectiva se podrá (modernizando la formulación peirciana) presentar el análisis de los signos desarrollados en C.P. 3.385 como un intento de construir un alfabeto y de formular reglas de construcción de expresiones bien formadas y de tesis. Se podrá mostrar por ejemplo, que el "alfabeto" de PEIRCE contiene tres grandes tipos de signos:

– signos enunciativos. Son de tres órdenes: las variables enunciativas: t (1.°)[83], las variables sintácticas: x, y, z (6.°) y las variables α y β (5.°) empleadas, como más adelante se verá, para la negación;

– un signo de operación $-<$ (2.°);

– los paréntesis[84] (4.°).

A este alfabeto se suma un cierto número de especificaciones enunciadas por PEIRCE en forma de reglas:

– Una regla de construcción de "expresiones bien formadas" del sistema, que en este caso es regla generadora de las expresiones implicativas (3.ª): *"En tercer lugar, la yuxtaposición de las letras a derecha e izquierda del signo de operación"* (C.P. 3.385).

– Dos reglas para la tesis del sistema (7.ª y 8.ª) que trataremos de interpretar más adelante[85].

Pero la formulación peirciana de 1885 también es nueva en el sentido de que adopta, en esta ocasión, una perspectiva puramente axiomática. Como punto de

---

de los símbolos a sus objetos correspondientes" (C.P. 2.93) y que por tanto "clasifica los razonamientos y determina la validez y el grado de fuerza de cada una de su especie" (C.P. 1.191); finalmente, la "retórica especulativa" de la cual existen varias formulaciones (Cf. especialmente C.P. 1.444, 3.430, 2.229, 2.93) pero que PEIRCE presenta al final de su vida como "Metodeútica" o "teoría general de la manera mejor de llevar a cabo la investigación" (C.P. 2.106), o incluso "Método del descubrimiento de los Métodos" (C.P. 2.108). En 1902 vuelve a usar las mismas palabras que en 1885 en el artículo que estudiamos.

[83] Las cifras entre paréntesis indican aquí el orden de presentación de los signos en C.P. 3.385.

[84] PEIRCE utiliza el signo ( ) y { }.

[85] En este análisis de los signos empleados en su sistema PEIRCE utiliza, para los signos, la triple distinción entre "token" (o "symbol"), "index" e "icon". Los "tokens" son signos unidos convencionalmente a sus objetos, los "índices" lo están existencialmente y los "icons" en virtud de una relación de semejanza (Cf. en especial C.P. 2.274 al 308). Aplicando estas notaciones a su cálculo lógico, PEIRCE clasifica aquí sus constantes lógicas y sus variables enunciativas "en el primer grado" (símbolo t por ejemplo) como "Tokens", sus variables enunciativas "en el segundo grado" (x, y, z, α, β) como "índices" de "Tokens" y sus fórmulas enteras como "icons". Se estudiará más adelante el sentido que debe darse a estos "icons" que traduciremos de aquí en adelante por "iconos". Pero es necesario notar aquí la distinción, que más adelante adquirirá importancia en el plano semántico, entre el signo y el signo de signo.

partida PEIRCE da, en efecto, cinco principios denominados *"iconos"*, cuatro de los cuales parecen ser tenidos por PEIRCE como axiomas. El primero es la ley de identidad, ya utilizado en 1880:

1 $$x \prec x$$ (C.P. 3.376)

y el segundo, que expresa la permutación de las premisas, era presentado como teorema en el sistema precedente (aunque con una equivalencia central en lugar de una simple implicación como aquí):

2 $$(x \prec (y \prec z)) \prec (y \prec (x \prec z))$$ (C.P. 3.377)

PEIRCE enuncia entonces algunas consecuencias de estos dos primeros principios. De 1 se sigue:

6 $$(x \prec y) \prec (x \prec y)$$ (C.P. ibid.)

que por 2 origina el modus ponens bajo la siguiente forma:

7 $$x \prec ((x \prec y) \prec y)$$ (C.P. ibid.)

que explicita de esta manera: *"esto quiere decir que si, en un estado cualquiera de cosas, x es verdadero y si la proposición "si x, entonces y" es verdadera, entonces, en este estado de cosas, y es verdadero. Es el modus ponens de la inferencia hipotética, la forma más elemental de razonamiento"* (C.P. 3.377). La ausencia de regla de sustitución nos sugiere que PEIRCE emplea aquí sus axiomas como esquemas de axiomas[86]. También es necesario notar que PEIRCE, como en 1880, no distingue explícitamente el nivel de los axiomas y de los teoremas del de las reglas de inferencia, confusión que, por cierto, se halla también en los paráfragos siguientes.

Una nueva dificultad aparece en las derivaciones que siguen. PEIRCE escribe efectivamente que es posible escribir $y \prec (x \prec x)$ y emplear 2 para obtener:

8 $$x \prec (y \prec x)$$ (C.P. 3.378)

pero las razones que da para escribir $y \prec (x \prec x)$ no son "axiomáticas": *"Decir que $(x \prec x)$ es universalmente verdadero, es decir que lo es en todo estado de cosas, en particular en aquél en que y es verdadero"* (C.P. 3.378). Al ser la fórmula 8 por ende necesaria, estaremos obligados a añadirla como nuevo axioma que numeraremos (8′).

[86] Esto es lo que parece sugerir la regla 7 en C.P. 3.385 donde PEIRCE presenta sus iconos como "modelos de procedimientos algebraicos". Pero esto es algo muy vago en la obra de PEIRCE.

El tercer icono que expresa en PEIRCE la transitividad de la cópula es presentado en C.P. 3.383 bajo la siguiente forma:

3 $$(x \prec y) \prec ((y \prec z) \prec (x \prec z))$$

La consecuencia que PEIRCE deriva de ello puede en adelante justificarse de manera estrictamente axiomática procediendo así (PEIRCE utiliza indebidamente en su presentación el teorema de deducción en C.P. 3.380):

$$(x \prec (y \prec x)) \prec (((y \prec x) \prec z) \prec (x \prec z)) \qquad \text{por 3}$$

$$x \prec (y \prec x) \qquad \text{por 8'}$$

9 $$((y \prec x) \prec z) \prec (x \prec z) \qquad \text{por modus ponens}$$

Antes de introducir el quinto icono hace falta considerar atentamente el cuarto icono que parece tener aquí un papel diferente de los otros axiomas. PEIRCE lo introduce de la siguiente manera: *"El tercer icono introduce la imagen de una cadena de consecuencias. Esta vez también nos hace falta ampliar la notación hasta introducir la negación. Ya hemos visto que si a es verdadero, podemos escribir* $x \prec a$, *cualquiera que sea x. Sea b tal que podamos escribir* $b \prec x$, *cualquiera que sea x; entonces b es falso"* (C.P. 3.381). Este nuevo icono parece responder según PEIRCE a una doble finalidad. Primero, introducir la negación, como lo indican las observaciones del parágrafo 3.385, donde PEIRCE escribe que su álgebra contiene *"las letras* α, β, *etc. que son los índices de símbolos cualesquiera y que se utilizan para expresar la negación"*[87], y la observación del parágrafo 3.386 donde se dice que estas leyes y el cuarto icono son, en general, *"procedimientos por los cuales expresamos la negación"*. Pero PEIRCE en el artículo de 1885 emplea el cuarto icono sobre todo para proveer de una nueva interpretación a sus fórmulas generales. En efecto, tras haber presentado la fórmula $b \prec x$, PEIRCE añade inmediatamente: *"Tenemos aquí un cuarto icono que da un nuevo sentido a varias fórmulas"* (C.P. 3.381) y, en el análisis de los signos empleados en su álgebra lógica (cf. C.P. 3.385), PEIRCE recoge la misma idea presentando el cuarto icono como el *"signo"* que *"provee de una segunda interpretación a las fórmulas generales"*. Así la fórmula 7 puede ser interpretada como la ley de contradicción, pues significa que *"... de x podemos extraer la consecuencia de que cualquier cosa se sigue de lo que se deduce de x, y, a fortiori, de todo lo que se deduce de x. Lo cual viene pues a decir que x conlleva la falsedad de la negación de x, lo cual no es sino el principio de contradicción mismo"* (C.P. 3.382). De la misma manera el segundo icono puede recibir un nuevo sentido si advertimos que *"puesto que z representa una proposición cualquiera, esto*

[87] En la exposición hecha por PEIRCE de su sistema la letra α no es utilizada más que una sola vez en C.P. 3.384. Sabido es que RUSSELL definirá la negación de p como $p \supset_r r$ en 1903. La formulación peirciana parece que puede expresarse por medio de $p \supset (\forall r)\, r$. Pero esta formulación permanece en la ambigüedad en la medida en que PEIRCE no emplea explícitamente un cuantificador (haría falta además una regla para la introducción de éste último).

quiere decir que si la verdad de x conlleva la falsedad de y, entonces la verdad de y conlleva la falsedad de x" (C.P. 3.381). El tercer icono también es nuevamente interpretado a la luz del cuarto icono de tal manera que *"justifica"* el modus tollens (C.P. 3.383). Por fin, la fórmula 9 *"muestra que la falsedad de y* $-\!\prec x$ *conlleva la falsedad de x"* (C.P. ibid.). En el artículo de 1880 (Cf. C.P. 3.191-194) ya había sido sugerida una forma semejante de enfocar la negación. Pero lo que hay que subrayar en el artículo de 1885 es el uso sistemático del cuarto icono como una especie de esquema de definición[88] renovando la interpretación de las fórmulas y permitiendo así obtener nuevas justificaciones de las inferencias.

En adelante nos es posible comprender mejor el quinto icono, a menudo llamado ley de PEIRCE:

5 $$((x -\!\prec y) -\!\prec x) -\!\prec x$$

y del cual da PEIRCE una demostración por las tablas de verdad (C.P. 3.384). Este principio, dice PEIRCE, es requerido por el principio de tercero excluso. En efecto, utilizando el cuarto icono, dice PEIRCE, obtenemos, a partir de la fórmula 5, la nueva fórmula

5′ $$((x -\!\prec y) -\!\prec \alpha) -\!\prec x$$

"donde el α *es usada en un sentido tal que* $(x -\!\prec y) -\!\prec \alpha$ *significa que de* $(x -\!\prec y)$ *se sigue toda proposición. Admitido esto, la fórmula establece el principio del tercero excluso, a saber, que de la falsedad de la negación de x se sigue la verdad de x* (C.P. 3.384). Esta presentación del quinto icono no es del todo clara. Parece que PEIRCE pone como fórmula fundamental la fórmula 5′ –de modo que ésta sería el verdadero icono– y no la fórmula 5. Se ve en efecto que si se interpreta 5′ por medio del cuarto icono se obtiene sin duda el principio del tercero excluso, pero con la condición de substituir y por α (cosa que PEIRCE no precisa, aunque en realidad lo hace). El icono 5′ aparece entonces como una especie de modelo de razonamiento: da el esquema de demostración de la fórmula 5, a saber, un razonamiento por reducción al absurdo en que se utiliza el tercero excluso.

Si se desarrollaran las sugerencias del parágrafo 3.389,[89] se podrían introducir en el sistema los otros funtores por medio de definiciones escribiendo, por ejemplo, $(x -\!\prec \alpha) + y$ en lugar de $x -\!\prec y$ y $(x -\!\prec (y -\!\prec \alpha)) -\!\prec \alpha$ en lugar de $x \times y$. PEIRCE no va más lejos en la exposición de su sistema proposicional. Sin embargo, gracias al cuarto icono, PEIRCE hubiera podido simplificarlo considerablemente. En

---

[88] La regla generadora que corresponde a este axioma aparece en el análisis de los signos en C.P. 3.385 (8.ª regla).

[89] En particular la observación según la cual "en lugar de $x -\!\prec y$ se puede escribir $\overline{\bar{x} + y}$ donde se implica que $\bar{x} + y$ (y no $x + y$ como está escrito) es el antecedente de todo consecuente" (C.P. 3.389).

efecto, el cuarto icono puede emplearse para interpretar de nuevo el segundo icono como una versión del modus tollens:

$$(x \prec \bar{y}) \prec (y \prec \bar{x})$$

una vez que PEIRCE ha mostrado que el cuarto icono justifica el modus tollens, se puede eliminar el segundo icono. Es más, si se adopta como icono la fórmula 8′ se puede derivar el primer icono por separación a partir de 8′, 3 y 5:

$x \prec ((x \prec y) \prec x)$	por 8′
$(x \prec ((x \prec y) \prec x)) \prec ((((x \prec y) \prec x) \prec x) \prec (x \prec x))$	por 3
$(((x \prec y) \prec x) \prec x) \prec (x \prec x)$	por modus ponens
$((x \prec y) \prec x) \prec x$	por 5
$x \prec x$	por modus ponens

Se obtiene entonces la formulación axiomática del cálculo implicativo de TARSKI-BERNAYS que adopta, junto a modus ponens, los tres axiomas siguientes[90]:

8′	$x \prec (y \prec x)$
3	$(x \prec y) \prec ((y \prec z) \prec (x \prec z))$
5	$((x \prec y) \prec x) \prec x$

a los cuales basta con añadir el axioma $0 \prec x$ para obtener una base suficiente para todo el cálculo enunciativo[91]. Es evidente que PEIRCE no podía tener conciencia de tal acabamiento de su cálculo, pues no poseía el instrumento suficiente para establecer la completud de su sistema, aunque podía establecer la consistencia por el método de las tablas de verdad, método que seguidamente debemos examinar en detalle.

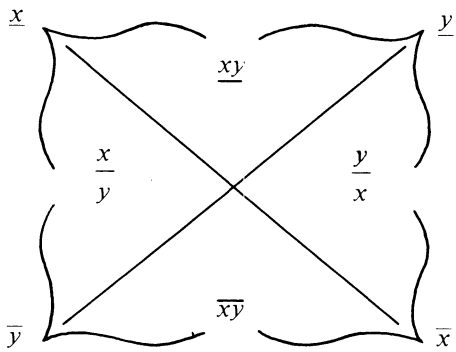
---

[90] A.N. PRIOR escribe: "TARSKI y BERNAYS mostraron hacia 1920 que todas las fórmulas tautológicas en este dominio restringido pueden demostrarse a partir de tres axiomas *CCpqCCqrCpr*, *CCCpqpp* y *CpCqp*. La segunda de estas leyes... era conocida desde PEIRCE (A.N. PRIOR, *Formal Logic*, 2.ª ed. (Oxford: Oxford University Press, 1962), p. 49). De hecho son las tres reglas que son conocidas por PEIRCE (aunque la tercera no es captada por él como un axioma).

[91] M. WAJSBERG, "Metalogische Beiträge", *Wiadomosci Matematyczne*, XLIII (1937). Puede encontrarse una traducción inglesa de este artículo en *Polish Logic* 1920-1939. Storrs McCALL ed. (Oxford: 1967), pp. 285-318.

1.24. Los procedimientos matriciales

No parece que PEIRCE haya desarrollado una versión propiamente matricial del cálculo enunciativo. Sin embargo se encuentra en 1902 una explicación de las bases teóricas del método de las tablas de verdad aplicado a los casos de un álgebra de dos valores. En particular define el número de esquemas de operaciones posibles en función del número de variables. Al notar que *"si cada objeto de un conjunto de m objetos está en relación con un objeto de un conjunto de n objetos, el número de esquemas posibles de relaciones entre los dos conjuntos se eleva a* n^m *"* (C.P. 4.260) PEIRCE considera entonces el caso de una sola variable: *"... una afirmación referente al valor de una cantidad, admite como posible o bien excluye, cada uno de los valores v y f. Así v y f forman el conjunto de m objetos, cada uno de ellos en relación con solamente uno de los n objetos, la admisión o la exclusión. Por lo tanto, existen* n^m*, es decir* 2^2*, ó 4 diferentes afirmaciones posibles referentes al valor de una cantidad cualquiera x. A saber, que una afirmación no será más que una forma de afirmación sin significación, puesto que admite uno u otro valor. Se representa por medio de la letra x. Otra afirmación infringirá la hipótesis de las dicotomías al incluir a la vez los dos valores. Puede representarse por* $\bar{x}$*. De las dos que quedan, una, a saber* $\underline{x}$*, admitirá v y excluirá f; la otra, a saber* $\bar{x}$*, admitirá f y excluirá v"* (C.P. Ibid.)[92]. El caso de dos variables es representado por PEIRCE en un diagrama:



que aclara de la siguiente manera: *"Consideremos ahora las afirmaciones relativas a los valores de dos cantidades, x e y. Hay en este caso dos cantidades de las cuales cada una tiene solamente uno de los valores; de tal suerte que existen* 2^2*, es decir 4 estados posibles de cosas, como muestra este diagrama. Sobre la línea que sube en*

[92] Lo cual puede representarse en el cuadro siguiente:

q	$\underline{x}$	$\bar{x}$	x	$\bar{x}$
1	1	0	1	0
0	1	0	0	1

oblicuo hacia la derecha figuran los casos en que x es v; bajo esta misma línea, aquéllos en que x es f. Sobre la línea que desciende en oblicuo hacia la derecha figuran los casos en que y es v; bajo esta línea los casos en que y es f. Ahora bien, para cada una de las afirmaciones posibles, cada uno de estos estados de cosas es o bien admitido o excluido, pero no admitido y excluido a la vez. De esta manera m se convierte en 2^2*, mientras que n se convierte en 2; y se darán* n^m*, o* 2^4*, o 16 afirmaciones posibles. Pueden ser representadas trazando entre x e y las líneas del diagrama y encerrando los casos para los conjuntos de valores excluidos"* (C.P. 4.261). PEIRCE introduce aquí dieciseis nuevos signos que corresponden a los diferentes operadores de dos argumentos pero que los editores de los *Collected Papers* no reproducen pues PEIRCE abandona en adelante estos signos particulares (Cf. C.P. 4.261, nota de los editores). El examen del caso de las tres variables conlleva un esbozo de presentación tabular[93]: *"Tratándose de tres cantidades, hay* 2^3*, u 8 conjuntos de valores posibles y por consiguiente* 2^8*, ó 256 formas diferentes de proposiciones. Entre éstas, solamente hay 38 de las cuales se puede verdaderamente decir que son expresables por los signos (que utiliza una lógica de dos cantidades). Bien es verdad que la mayoría de las otras podría expresarse por medio de dos proposiciones por lo menos. Pero, hasta ahora, no hemos adoptado expresamente un signo para la operación de composición de proposiciones. Además, aún pudiendo recurrir a tales signos, no se conseguiría expresar un buen número de proposiciones. Sirva de ejemplo este enunciado, que admite los siguientes conjuntos de valores:*

x	y	z
v	v	v
v	f	f
f	v	f
v	f	v" (C.P. 4.262)

Pero en el cálculo de PEIRCE no se encontrarán más que equivalentes verbales de las tablas de verdad. En 1885, por ejemplo, escribe: *"... Para descubrir si una fórmula es necesariamente verdadera, sustituid las letras por f y v, y ved si se la puede suponer falsa para toda asignación de estos valores"* (C.P. 3.387). PEIRCE utiliza repetidamente este método, y en especial en su artículo de 1885 lo usa, como ya lo hemos hecho notar, para la demostración de su tercer icono (Cf. C.P. 3.384). Lo emplea también en C.P. 3.387 para demostrar el tercer icono de esta manera: *"Tomad, por ejemplo, la fórmula:*

$$(x \prec y) \prec ((y \prec z) \prec (x \prec z))$$

[93] Se podría encontrar una anticipación moderna de la representación tabular en la obra de BOOLE, *The Mathematical Analysis of Logic, being an essay toward a claculus of deductive reasoning* (London: 1847), pp. 49-50. El uso de tablas de verdad se encuentra igualmente en FREGE, pero con un orden diferente, pues FREGE enuncia el consecuente antes del antecedente (FREGE, *op. cit.*, p. 5 por ejemplo).

Para que sea falsa debe admitirse:

$$(x \prec y) = v$$

$$((y \prec z) \prec (x \prec z)) = f$$

Lo cual da:

$$(y \prec z) = v, \quad (x \prec z) = f, \quad x = v, \quad z = f$$

Substituyendo estos valores en

$$(x \prec y) = v \quad (y \prec z) = v$$

Obtenemos:

$$(v \prec y) = v \quad (y \prec f) = v,$$

lo cual no puede satisfacerse simultáneamente" (C.P. Ibid.). Conforme a este pasaje parece que, en efecto, PEIRCE conocía desde 1885 un verdadero procedimiento de decisión utilizable en el terreno del cálculo proposicional, y esto bastante antes que SCHRÖDER, a pesar de lo que parece sugerir I.M. BOCHENSKI[94]. Pero sobre todo nos parece interesante notar que PEIRCE, desde 1909, parece haber querido extender su método a los casos de un cálculo con tres valores, adelantando así las investigaciones de J. ŁUKASIEWICZ y de E. POST[95].

M. FISCH y A. TURQUETTE han publicado, en efecto, en 1966 tres páginas de un manuscrito de PEIRCE (*Logic Note-Boock*, Ms 339) donde aparecen por primera vez en lógica, matrices aplicadas a un cálculo trivalente[96]. De esta forma se hallan, en la página 340 (reverso), cuatro operadores monádicos:

x	$\bar{x}$	$\breve{x}$	$\acute{x}$	$\frac{0}{x}$
V	F	F	L	L
L	L	V	F	L
F	V	L	V	L

[94] Cf. I.M. BOCHENSKI, *A History of Formal Logic*, traducido por I. THOMAS (Notre Dame: University of Notre Dame Press, 1961), p. 333.

[95] Las primeras investigaciones de ŁUKASIEWICZ sobre la lógica plurivalente aparecen en 1920: "O Logice trojwartosciowej", *Ruch Filozoficzny*, V (1920), pp. 169-171. Las de Post al año siguiente: "Introduction to a general Theory of Elementary propositions", *American Journal of Mathematic*, XLIII (1921), pp. 163-185.

[96] M. FISCH and A. TURQUETTE, "PEIRCE's triadic Logic", *Transactions of the Charles Sanders PEIRCE Society*, II/2 (1966), pp. 71-85. El signo *Ms* situado delante de una cifra remite al catálogo de los manuscritos de PEIRCE preparado por R.S. ROBIN.

Se ve con facilidad que los tres primeros definen negaciones: $\bar{x}$ anticipa la negación N_x de ŁUKASIEWICZ y $\breve{x}$ y $\acute{x}$ respectivamente las negaciones $\sim \frac{2}{3} x$ y $\sim_3 x$ de POST. La última columna $\frac{0}{x}$ parece ser una anticipación de la función T_x de SLUPECKI[97].

Pero PEIRCE define también conectivas binarias. En la página 341 (reverso) se encuentran seis operadores presentados de dos en dos:

Φ	V	L	F
V	V	V	V
L	V	L	F
F	V	F	F

Θ	V	L	F
V	V	V	V
L	V	L	L
F	V	L	F

Ψ	V	L	F
V	V	V	F
L	V	L	F
F	F	F	F

Z	V	L	F
V	V	L	F
L	L	L	F
F	F	F	F

Ω	V	L	F
V	V	L	F
L	L	L	L
F	F	L	F

Υ	V	L	F
V	V	L	V
L	L	L	L
F	V	L	F

Fácilmente puede verse que Θ corresponde a la disyunción V_3 de POST y que entre Θ y Z existe una relación de dualidad (haciendo referencia a la negación de ŁUKASIEWICZ). De los resultados de POST se sigue igualmente que una lógica trivalente funcionalmente completa puede construirse sin utilizar más que los operadores Θ y '.[98]. El operador Ω corresponde a la conjunción débil de KLEENE[99]. Puesto que entre Ω y Υ existe una relación de dualidad semejante a la precedente, resulta que este último operador corresponde a la disyunción débil del mismo autor. En lo que a los operadores Φ y Ψ (entre los cuales existe también una relación de

[97] J. SLUPECKI, "Der volle dreiwertige Aussangenkalkül", *Comptes rendus des seances de la Societé des Sciences et des Lettres de Varsovie*, Classe III, XXIX (1936), pp. 9-11. Cf. igualmente J.B. ROSSER and A.R. TURQUETTE, *Many valued Logics* (Amsterdam: North Holland Publishing Company, 1952), capítulo II.

[98] POST, *op. cit.*, pp. 180-181.

[99] S.C. KLEENE, *Introduction to Metamathematics*, 5.ª ed. (Amsterdam: North Holland Publishing Company, 1964), p. 334.

dualidad con referencia a la negación de ŁUKASIEWICZ) se corresponden con la disyunción y la conjunción del sistema trivalente de SOBOCINSKI[100]. Que Φ sea presentada en la misma línea que Θ nos sugiere que existe una relación entre estos dos operadores. Un rápido examen nos muestra que tanto en Φ como en Θ, V aventaja a todos los demás valores, pero que, en Φ, F aventaja a L, mientras que L aventaja a F en Θ. Una especie de inversión aparece por tanto entre estas dos funciones. La misma inversión se da entre Ψ y Z ya que, si bien en ambos casos F aventaja a los valores restantes, V aventaja a L en el primer caso mientras que L aventaja a V en el segundo caso. Si hiciera falta explicar por qué introduce PEIRCE Φ y Ψ, podría señalarse que se trata de generalizaciones de la disyunción y de la conjunción de la lógica bivalente (donde v y f aventajan a l). Por otro lado es de notar que las interpretaciones en lenguaje de verdad y de falsedad aparecen en la página 344 (anverso) precisamente en un pasaje que, al mismo tiempo, nos aclara las motivaciones profundas que han podido conducir a PEIRCE a estos primeros intentos de lógica polivalente. PEIRCE efectivamente escribe en dicho párrafo: *"La lógica triádica es la lógica que... reconoce que toda proposición S es P o verdadera o falsa; a no ser que S tenga un modo de ser aminorado de manera que no puede ser ni verdaderamente P ni verdaderamente no P, sino que se sitúe en el límite entre P y no P"*. Este texto data del 23 de febrero de 1909. Ahora bien, veremos más adelante que en esta época PEIRCE definía una modalidad triádica centrada completamente sobre la noción de "indeterminación". Esto nos sugiere la idea de una posible relación entre los dos tipos de investigación.

1.25. Reducción a un funtor único

Antes de terminar con esta presentación de la formulación algebraica del cálculo enunciativo de PEIRCE, es necesario decir algo sobre un importante descubrimiento hecho en 1880 y recogido en 1902, por el cual PEIRCE anticipa el descubrimiento shefferiano de 1913 de la posibilidad de un funtor único para el cálculo enunciativo[101].

En efecto, en una nota sin título de 1880 publicada en 1933 (Cf. C.P. 4.12-20), PEIRCE utiliza como única constante lógica un signo que representa la negación simultánea de dos proposiciones y que introduce de la manera siguiente: *"Empiezo por describir la notación de las proposiciones condicionales o "secundarias". Las diferentes letras representan proposiciones. Toda proposición escrita sola, aisladamente, se considera afirmada. Así:*

---

[100] B. SOBOCINSKI, "Axiomatisation of a partial system of three value Calculus of propositions", *Journal of computing systems*, I (1952), pp. 23-35. Se encuentran igualmente estos dos operadores en el sistema de W.S. COOPER ("The propositional Logic of ordinary discurse", *Inquiry*, XI (1968), pp. 295-320).

[101] Cf. H.M. SHEFFER, "A Set of Five Independent Postulates for Boolean Algebras, with application to logical constants", *Transactions of the American Mathematical Society*, 14 (1913), pp. 481-488.

$$A$$

significa que la proposición A es verdadera. Dos proposiciones anotadas conjuntamente se considera que ambas están negadas. Así:

$$A\,B^{102}$$

significa que las proposiciones A y B son falsas ambas" (C.P. 4.13). A partir de lo cual, utilizando la coma, el punto y coma, los dos puntos y los paréntesis PEIRCE define los otros funtores. Así $\bar{A}$ se obtiene sustituyendo A por B en $A\ B$ (cf. C.P. 4.13). En efecto, si se utiliza la siguiente tabla de verdad:

$A\ A$	$A + A$	$\overline{A + A}$
1 1	1	0
0 0	0	1

Se ve que $\overline{A + A}$ tiene el esquema de $\bar{A}$. Por tanto $AA = df\ \bar{A}$. La traducción de la implicación es presentada de la siguiente manera: *"Para expresar la proposición: "Si S entonces P, escríbase primero:*

$$A$$

en lugar de esta proposición. Pero esta proposición es la siguiente: un cierto estado de cosas está ausente del universo de los posibles. Por tanto en lugar de A escribimos:

$$B\,B$$

B expresa entonces la posibilidad de que S sea verdadero y de que P sea falso. Ya que, por tanto S S niega S, se sigue que (S S, P) expresa B. Escribimos por consiguiente:

$$\cdot\, S\,S,\, P\,;\, S\,S,\, P \quad \text{(C.P. 4.414)"}$$

PEIRCE no ha dado los demás funtores. Pero con facilidad se ve que podría escribirse la disyunción:

$$A\,B\,;\,A\,B$$

En efecto, conforme a la definición de la negación:

---

[102] SHEFFER empleará el signo de la disyunción V, invertido, para representar la no disyunción.

$$A\,B\,;A\,B = df\,\overline{A\,B}$$

Ahora bien $A\ B$ es la negación conjunta de A y B, es decir, la disyunción negada. Por tanto:

$$A\,B\,;A\,B = df\,A + B$$

Asimismo se obtiene con facilidad la conjunción:

$$A\,A\,;B\,B = df\,A \times B$$

e igualmente los restantes funtores[103]. En 1902 PEIRCE propuso una nueva formulación en la que seguía utilizando la negación simultánea de dos proposiciones pero representándola por medio de $x \barwedge y$: *"Por ejemplo, $x \barwedge y$ significa que x es f y que y es f. Por donde*

$$(x \barwedge y) \barwedge z \quad \text{ó} \quad \underline{x \barwedge y} \barwedge z$$[104]

viene a significar que z es f, pero que la proposición según la cual x e y son ambas f es ella misma f, es decir que es falsa. De ahí que el valor de $x \barwedge x$ es el mismo que el de $\overline{x}$; y el valor de $\underline{x \barwedge x} \barwedge x$ es f, pues ello es necesariamente falso; mientras que el valor de $\underline{x \barwedge y} \barwedge \underline{x \barwedge y}$ no es f más que si $x \barwedge y$ es v; y $(\underline{x \barwedge x} \barwedge x) \barwedge (x \barwedge \underline{x \barwedge x})$ es nenecesariamente verdadero, de manera que su valor es v. Con estos dos signos, el vinculum (con sus equivalentes, paréntesis, comillas, corchetes, etc.) y el signo $\barwedge$ que llamaré ampheck (de αμφήκης, que corta en los dos sentidos) todas las afirmaciones referentes a los valores de cantidades pueden ser expresadas" (C.P. 4.264). Según esta notación tenemos que las principales fórmulas ofrecidas por PEIRCE en C.P. 4.264 (donde el punto designa la conjunción, y los signos v y ≡ respectivamente la disyunción y la equivalencia):

x	$\underline{x \barwedge x} \barwedge \underline{x \barwedge x}$
$\overline{x}$	$x \barwedge x$
$x \cdot y$	$\underline{x \barwedge x} \barwedge \underline{y \barwedge y}$
$x \vee y$	$\underline{x \barwedge y} \barwedge \underline{x \barwedge y}$
$x \equiv y$	$(x \barwedge \underline{y \barwedge y}) \barwedge (\underline{x \barwedge x} \barwedge y)$

[103] Tras de lo cual PEIRCE estudia (C.P. 4.16-18) los procesos de desarrollo y de eliminación utilizables en el marco de un álgebra booleana y subraya (Cf. C.P. 4.20) que se puede traducir en la nueva notación, el 0 y el 1 (para ello se mostraría en efecto que $A,\ A\,A = df\,0$ pues equivale a $\bar{A} \times A$ y por tanto que $A,\ A\,A\,;A,\ A\,A = df\,1$). El fundamento explícito del álgebra de BOOLE sobre un único operador primitivo aparece en el artículo de SHEFFER de 1913. Pero ya E. STAMM ofrecía algunas sugerencias en un artículo aparecido en *Monastshifte für Mathematik und Physik*, 22 (1911), pp. 137-149.

[104] La barra inferior horizontal permite, como se ve, suprimir paréntesis.

En el mismo ensayo PEIRCE sugiere la utilización de la incompatibilidad[105] como funtor único. Así

$$x \barwedge y$$

representa la disyunción de negaciones de las proposiciones simbolizadas. Y muestra que las dos constantes lógicas pueden definirse una a partir de la otra. Efectivamente, puesto que:

$$x \barvee y = \bar{x} \cdot \bar{y}$$

y

$$x \barwedge y = \bar{x} \vee \bar{y}$$

y

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = - [- (\bar{x} \vee \bar{x}) \vee - (\bar{y} \vee \bar{y})]$$

debe ser verdadero que:

$$x \barvee y = (\underline{x \barwedge x} \barwedge \underline{y \barwedge y}) \barwedge (\underline{x \barwedge x} \barwedge \underline{y \barwedge y})$$

y puesto que:

$$\bar{x} \vee \bar{y} = - [- (\bar{x} \cdot \bar{x}) \cdot - (\bar{y} \cdot \bar{y})]$$

debe ser verdadero que:

$$x \barwedge y = (\underline{x \barvee x} \barvee \underline{y \barvee y}) \barvee (\underline{x \barvee x} \barvee \underline{y \barvee y})$$ (Cf. C.P. 4.265, n. de los editores)

Pero PEIRCE no parece haber desarrollado esta nueva formulación. No podemos extrañarnos de ello, vista la importancia otorgada a la implicación, y especialmente a la implicación material que, en 1885, le parecía ser *"el modo primero y fundamental de relación entre dos proposiciones"* (C.P. 3.373). No parece exagerado decir que, para PEIRCE, el ideal de una lógica de enunciados parece consistir en la búsqueda de implicaciones tautológicas. Pero debe añadirse que a partir de 1885 tal investigación toma una dirección totalmente nueva: PEIRCE que hasta entonces se había interesado por las formulaciones de tipo algebraico, se orienta desde ese momento hacia presentaciones por medio de diagramas de tipo geométrico. Estos acapararán todo nuestro interés en las páginas que siguen, donde expondremos la sección Alfa de los *"gráficos existenciales"* en la cual PEIRCE desarrolla una interesante formulación de los gráficos enunciativos.

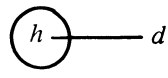
---

[105] SHEFFER no introduce la no conjunción más que en una nota a pie de página, y no utiliza para ella signo especial alguno. La línea vertical sólo fue utilizada por SHEFFER con referencia al álgebra de BOOLE. J.G.P. NICOD es quien lo introduce como signo de no conjunción en un artículo aparecido en *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 19 (1917/1920), pp. 32-41.

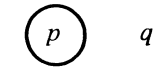
2. LA FORMULACION GRAFICA

2.1. De los "gráficos de entidades" a los "gráficos existenciales"

El término de *"gráfico existencial"* parece que surge por primera vez en una serie de conferencias escritas en 1898 bajo el título: *"Detached ideas on vitally important Topics"* (Cf. C.P. 5.579). Pero, como se verá en el próximo capítulo, PEIRCE se interesaba, desde hacía ya largo tiempo, por el problema de la representación gráfica de los cálculos lógicos, y en particular del cálculo de los *"relativos"*. Precisamente en un sistema de gráficos dedicado a la lógica de los *"relativos"* es donde PEIRCE ofrece los primeros embriones de los que más tarde se convertirá en la sección enunciativa Alfa de los gráficos existenciales. Efectivamente en el sistema gráfico publicado por PEIRCE en 1897 –sistema que será llamado de los *"entitative graphs"*[106]– se encuentra un esbozo de representación por medio de diagramas geométricos que, a pesar de estar destinados aquí a la representación de las relaciones entre predicados, tienen algunos elementos que se pueden utilizar en el marco de un cálculo proposicional. En C.P. 3.475 PEIRCE ofrece, por ejemplo, la siguiente figura:



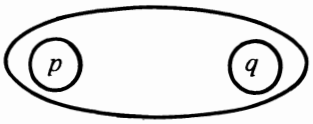
en la cual *h* y *d* representan respectivamente las propiedades (que él llama *"monads"*): *"–es un hombre"* y *"–es mortal"*. La interpretación que de ella hace más adelante es la siguiente: *"Sea A que representa una cosa cualquiera. Existen dos proposiciones, 1 y 2, de las cuales una es verdadera. La proposición 1 es que A no es un hombre. La proposición 2 es que A es mortal. Más simplemente, cualquiera que sea A, o bien A no es un hombre, o bien A es mortal"* (C.P. 3.480). Si nos desentendemos de la barra horizontal que, como se verá en el próximo capítulo, no tiene sentido más que en lógica de predicados, la figura se convierte en:



y su interpretación en lógica enunciativa nos muestra entonces que escribir una proposición sola viene a ser afirmarla, que encerrar una proposición dentro de un círculo es negarla y que la yuxtaposición sobre una misma superficie de dos proposiciones (que pueden estar afirmadas o negadas) representa una disyunción de estas proposiciones. Se ve entonces que la figura precedente representa una implicación, mientras que la conjunción se representaría por medio de:

---

[106] Cf. "The Logic of Relatives", *The Monist*, VII (enero 1897), pp. 161-217 (en particular las secciones 4, 5 y 6), C.P. 3.456-552. PEIRCE no dice cuándo forjó el término de "entitative graph" que nosotros traduciremos por "gráfico de entidad". Si se consideran las obras publicadas la expresión aparece en 1903 (cf. C.P. 4.434) y se repite en 1906 (Cf. C.P. 4.564).



conforme a la ley de dualidad. Pero PEIRCE abandonó rapidamente sus gráficos de entidades. Una carta del 6 de diciembre de 1911 a RISTEEN nos revela que, al leer el artículo del *Monist* donde su sistema aparecía por primera vez, a PEIRCE se le ocurrió la idea de un nuevo sistema que se convertiría luego en el sistema de los gráficos existenciales[107]. PEIRCE se dió cuenta, en efecto, que las estipulaciones que había adoptado desde el principio, además de dificultar el manejo de los *"relativos"*, conllevaban ciertos rasgos carentes de naturalidad. Así, por ejemplo, la yuxtaposición concebida como disyunción: *"Por una razón auxiliar a la cual, no obstante, conviene conceder cierta importancia, un modo de representación por diagramas se hace recomendable por el hecho de que la naturaleza y las costumbres de nuestro espíritu nos lo hacen captar de buenas a primeras, sin tener que hacer el esfuerzo de acordarnos de una regla ajena por completo a nuestros modos de expresión habituales y naturales. De seguro que ninguna convención de representación tendrá este mérito en un grado mayor que la que se propone escribir a la vez las dos afirmaciones con el fin de expresar la verdad de ambas. Es tan perfectamente natural que a ella han recurrido todos los que en alguna ocasión han utilizado letras o casi todos los otros métodos de representación diagramática. Parece casi inevitable, a pesar de que en el primer sistema de gráficos que he inventado (gráficos que llamo gráficos de entidades), las proposiciones escritas conjuntamente sobre el papel no se entendía que eran afirmadas con independencia de unas respecto de las otras, sino alternativamente. Por consiguiente, una hoja en blanco, en vez de expresar solamente lo que se admitía, debía ser interpretada como expresión de un absurdo"* (C.P. 4.434; Cf. 4.564). PEIRCE envió con gran celeridad una exposición de su nuevo sistema a Paul CARUS, el editor del *Monist*. Pero éste no lo publicó. Algún tiempo después, PEIRCE tuvo la ocasión de presentar una reseña oral de ello en la *National Academy of Sciences*. Pero hasta 1903 no lo hizo publicar con ocasión de un ciclo de conferencias dado en el Lowell Institute (C.P. 4.394-529)[108]. PEIRCE desarrollaba su sistema en tres partes, Alfa, Beta y Gamma, la primera de las cuales expone un sistema de gráficos enunciativos que vamos a estudiar ahora detalladamente. En este estudio utilizaremos también ciertas notas desarrolladas con ulterioridad por PEIRCE, en particular en un artículo aparecido en *The Monist* en 1906 (C.P. 4.530-572)[109]. Nos referiremos también a los manuscritos Ms 450, 455, 500 que contienen interesantes observaciones sobre los gráficos existenciales.

[107] Ms. 500.

[108] Los pasajes publicados en los *Collected Papers* están extraídos de las "Lowell Lectures" de 1903, de un ensayo destinado en parte a completarlas: "A syllabus of certain Topics of Logic" (1906), pp. 15-23, y un ensayo titulado "Logical Tracts N.º 2."

[109] "Prolegomena to an Apology for Pragmaticism", *The Monist*, XVI (1906), pp. 492-546.

2.2. Sección Alfa de los "gráficos existenciales"

La sección Alfa se presenta como un conjunto de manipulaciones gráficas referentes a proposiciones sin analizar. Ante todo vamos a estudiar los símbolos y convenciones de escritura utilizados por PEIRCE y las reglas de transformación que hacen posibles tales manipulaciones.

2.21. Símbolos y convenciones de escritura

Primero nos hace falta presentar la noción general de gráfico: éste se define, según PEIRCE, como *"la expresión enunciativa en el sistema de gráficos existenciales de todo estado posible del universo"* (C.P. 4.395)[110]. A esta noción general de gráfico PEIRCE añade la de *"graph replica"* que significa la realización de un gráfico[111].

Los gráficos se presentan en Alfa como figuras bidimensionales. Previamente es necesario tomar una superficie, en la práctica una pizarra u hoja de papel: es lo que PEIRCE llama *"hoja de aserción"* (C.P. 4.396) que simbolizaremos por medio de H.A. y que interpreta explícitamente en Ms 450 como el *"universo del discurso"* de A. DE MORGAN, es decir, el dominio de los objetos de que va a hablarse. PEIRCE entonces enuncia lo que llama convención n.º 1: la inscripción[112] de un gráfico sobre H.A. representa la afirmación de la verdad de la proposición expresada por ese gráfico (Cf. C.P. 4.397). Conviene notar aquí que H.A. es ella misma un gráfico *"que afirma que todo lo que es admitido entre el creador del gráfico y el intérprete es verdadero de este universo"* (C.P. 4.396). Se podría pues interpretar la hoja blanca como una pura denotación de lo Verdadero sin connotación alguna.

La segunda convención define la conjunción de dos proposiciones: la yuxtaposición de dos gráficos sobre H.A. representa la afirmación de su verdad simultánea (Cf. C.P. 4.398). En efecto, tal como lo hace notar PEIRCE en Ms 450, si se inscriben gráficos diferentes sobre partes diferentes de H.A. cada uno tendrá el mismo sentido que si los otros estuvieran ausentes, de modo que el conjunto podrá interpretarse como una conjunción continua de verdades elementales. De esta forma, la conjunción sustituye a la disyunción de los *"gráficos de entidades"*, que PEIRCE juzga poco *"natural"* como se ha visto más arriba. En la exposición de la segunda convención (en C.P. 4.398), PEIRCE introduce una distinción entre gráfico parcial y entero. Se entenderá por *"gráfico entero"* todo lo que está inscrito sobre H.A. o sobre una parte aislada de H.A., de modo que el *"gráfico parcial"* será todo gráfico que tome parte en el precedente. PEIRCE añade, en un manuscrito sin publicar, la

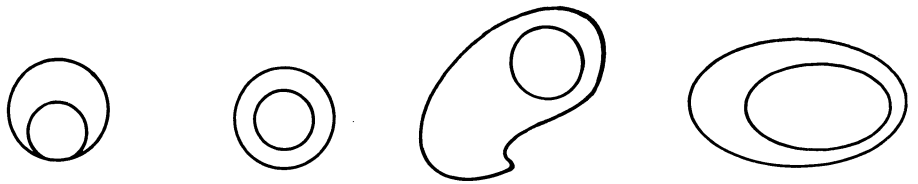
[110] En C.P. 4.538 PEIRCE parece haber considerado también la posibilidad de utilizar los gráficos para representar enunciados no aseverativos que denomina "phemes".

[111] En 1910 PEIRCE abandona este término en favor del de "instance" (C.P. 4.395, n. 1).

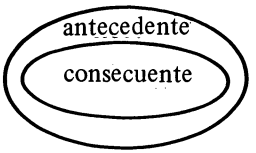
[112] PEIRCE usa el verbo "to scribe" con preferencia a "to draw" o "to write" (cf. Ms. 450).

noción de *"gráfico total"*, que se compone del *"gráfico entero"* y de H.A. (Cf. Ms 450).

La tercera convención tiene gran importancia, pues introduce un nuevo símbolo que va a permitirnos expresar la implicación material y la negación. La representación de una implicación material planteaba a PEIRCE un problema especialmente arduo dentro de un sistema de gráficos existenciales. En efecto, la aserción "Si *P* entonces *Q*" no afirma ni *P* ni *Q* aunque afirma "si *P* entonces *Q*". Hacía pues falta encontrar un procedimiento de colocar la implicación sobre H.A. sin inscribir en ella ni *P* ni *Q*. PEIRCE a este efecto imagina una figura formada por dos curvas cerradas no secantes situadas una en el interior de la otra, de modo que el conjunto de las dos curvas forma lo que llama una *"voluta"* (*scroll:* C.P. 4.400). Puede representarse esta última de maneras diversas[113]:



Cada una de las curvas cerradas o *"cuts"* recorta la superficie sobre la cual se encuentra inscrita[114], de modo que lo que está situado en el interior de la cortadura se halla literalmente separado de la hoja misma. Así la siguiente figura[115]:



representa la implicación material, y los puntos de la cortadura exterior puede considerarse que forman parte de H.A. mientras que los puntos de la superficie cercada por esta última cortadura pueden tenerse por separados de la hoja que representa el

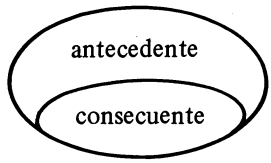
---

[113] En C.P. 4.509 PEIRCE enuncia esta posibilidad en forma de regla, llamada "regla de deformación": "Se pueden deformar de una manera cualquiera todas las partes de un gráfico, sin que cambien las relaciones entre las partes." PEIRCE la sitúa entre las reglas de inferencia. De hecho se trata de una verdadera regla de escritura.

[114] De ahí que PEIRCE dé a veces al "cut" el nombre de "sep" (saepes en latín) (C.P. 4.435). Traduciremos de aquí en adelante "cut" y "sep" por "cortadura".

[115] En el lugar de las palabras "antecedente", "consecuente", PEIRCE a menudo escribe las proposiciones enteras o las representa por medio de letras que juegan así el papel de variables enunciativas.

universo del discurso[116]. Puede además preferirse a la figura precedente la siguiente figura, que PEIRCE a veces utilizó (C.P. 4.435):



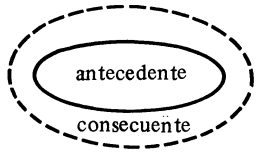
en la cual la voluta puede construirse como una curva cerrada única, lo cual traduce mejor, creemos, la idea peirciana según la cual "... *el consecuente de una proposición condicional afirma lo que es verdadero, no en el universo entero de las posibilidades consideradas, sino en un universo subordinado circunscrito al antecedente*" (C.P. 4.435)[117]. Con esto podría decirse que palpamos en su construcción misma el lazo particular que une el consecuente al antecedente[118].

En su representación de la implicación PEIRCE utiliza cierto número de palabras técnicas que todavía no hemos encontrado:

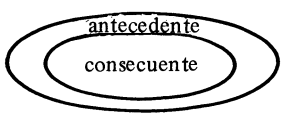
---

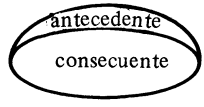
[116] Para ser más precisos sería necesario decir que el conjunto formado por la cortadura externa y todo lo que encierra (el conjunto forma lo que PEIRCE llama l'"enclosure", término que traduciremos por "área cerrada") es lo que está según PEIRCE sobre H.A., pues sólo la superficie interna de la cortadura externa está separada de H.A.: "Aunque el área rodeada de la cortadura no constituye una parte de la hoja de aserción, sin embargo la cortadura junto con su área... será, bajo el nombre de *área cerrada*..., considerada como si estuviera sobre la hoja de aserción..." (C.P. 4.399). Semejante representación de la implicación parece más sugestiva que la propuesta en los gráficos de entidades. En éste último sistema PEIRCE utilizaba, como se ha visto, $(p)\quad q$.

[117] PEIRCE, es verdad, opone simplemente esta última figura a la siguiente (Cf. C.P. 4.435):



Pero al comparar, en el parágrafo siguiente, las figuras:





observa sin embargo que la tangente de las curvas puede ayudar al espíritu en la interpretación de la implicación material (Cf. C.P. 4.436).

[118] En la práctica, sin embargo utilizaremos curvas no tangentes por razón de comodidad.

– *"Close"* (4.437) *"Area"* (C.P. 4.399 y 556): superficie comprendida en el interior de una cortadura. Traducimos estos dos términos por "área". Debe notarse que *"close"* utilizado en solitario significa a veces: superficie total comprendida en la cortadura externa (Cf. C.P. 4.437).

– *"outer cut"*, *"outloop"* (C.P. 4.400): la cortadura externa.

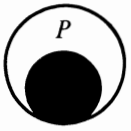
– *"Inner cut"*, *"inloop"* (C.P. 4.400), *"loop"* (C.P. 4.437): la cortadura interna.

– *"nest of cuts"* (C.P. 4.494): conjunto de cortaduras encajadas unas en las otras.

– *"first close"* (C.P. 4.437): superficie comprendida entre las cortaduras internas y externas (caso de que haya dos cortaduras encajadas).

– *"second close"* (C.P. 4.437): superficie comprendida en la cortadura interna.

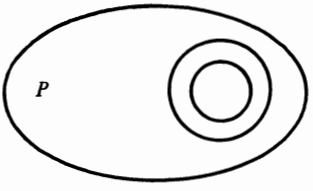
De la tercera convención en adelante es fácil representar la negación. PEIRCE utiliza aquí un equivalente gráfico de la definición de la negación en términos de implicación, dada en los sistemas algebraicos que hemos estudiado en la sección precedente. PEIRCE representa primero una proposición absurda por medio de lo que él llama un *"pseudo gráfico"*[119], recurriendo, por ejemplo, al relleno de una área: *"Si se rellena por entero una superficie por medio de cualquier material de escritura que pueda utilizarse (tinta, tiza, etc.) se dirá que se obstruye esta superficie y se entenderá como la expresión de un pseudográfico sobre esta superficie"* (C.P. 4.402)[120]. Por ello mismo, la siguiente figura, donde la mancha[121], por ejemplo, *"toda proposición es verdadera"* (un absurdo por ende), equivale a la negación de *P* pues, dice PEIRCE, *"Decir que si una proposición dada es verdadera, toda cosa es*



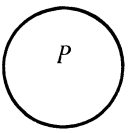
[119] Estrictamente hablando, en efecto, no se trata de un gráfico: puesto que es absurdo, expresa un estado de cosas imposible, mientras que el gráfico es la expresión de un estado posible del universo (Cf. C.P. 4.395).

[120] PEIRCE llama "mancha" el área rellena que representa el pseudográfico (Cf. Ms. 445); también a veces utiliza la cortadura vacía ◯ (Cf. C.P. 4.467).

[121] En la figura que sigue, la mancha debe percibirse como si poseyera una cortadura externa que rodea su contenido (pero confundida con ella). Si empleamos la cortadura vacía en lugar de la mancha, la figura se convertiría en lo siguiente:



verdadera equivale a negar esta proposición" (C.P. 4.402). Pero la figura precedente puede simplificarse, pues la superficie que representa la proposición absurda puede disminuirse indefinidamente hasta confundirse con la cortadura externa (cf. C.P. 4.402 y 4.455). Tendremos pues la figura:



que expresará, como en los "gráficos de entidades", la negación de *P*. Se ve entonces que la cortadura sola aparece como un caso límite de la voluta, mientras que la negación aparece como el caso "límite" de una implicación[122]. Si se utiliza la primera convención y la parte de la tercera que rige la negación, se podrá entonces escribir:

1) *P* "*P* es verdadero"[123]

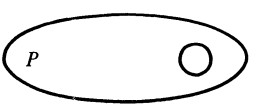
2) "*P* es falso"

3) "Es falso que *P* es falso", es decir "*P* es verdadero".

El gráfico *P* en 1 y 3 está cercado por un número par (o nulo) de cortadura: se le llama *"evenly enclosed"*, mientras que en 2 se le llama *"oddly enclosed"* (posteriormente veremos la importancia de estas distinciones). En un cuadro podrían resumir-

---

[122] Aunque la mancha puede confundirse con la cortadura externa, es conveniente notar sin embargo que no debe desaparecer si se quiere que la cortadura externa represente una negación, como, por cierto, lo hace notar PEIRCE en 1906. En efecto, la desaparición de la mancha daría lugar a la figura siguiente:



que significa "Si *P* es verdadera entonces alguna cosa es verdadera". Utilizando una regla que enunciaremos más adelante (regla de "desiteración") se podrá quitar el vacío del interior de la cortadura interna, con lo cual se deja a *P* sola en el cut externo. Pero entonces, como observa PEIRCE, "Esto no tiene significación alguna que no esté implicada en la proposición "si *A* es verdadera, alguna cosa es verdadera" " (C.P. 4.564, n. 1).

[123] En C.P. 4.507 PEIRCE enuncia una regla llamada regla de "aserción" que sitúa entre unas reglas de inferencia (de hecho esta regla resulta ser más bien una regla de escritura): "Todo gráfico cuya verdad es bien conocida podrá trazarse sin cortadura". Permite la introducción de premisas sobre H.A. con la finalidad de razonar sobre problemas determinados. Es necesario unir esta regla a la convención n.º 1.

se las convenciones precedentes y comparar las representaciones gráficas y algebraicas (utilizando P y Q para representar las proposiciones)[124]:

	Algebra (de 1880)	Gráficos de entidades	Gráficos existenciales
1	P	P	P
2	$\overline{P}$	(P)	(P)
3	$P \times Q$	(P) (Q)	P Q
4	$P \prec Q$	(P) Q	P (Q)
5	$P + Q$	P Q	(P) (Q)

2.22. Las reglas de transformación

Una vez dados los símbolos y las reglas de escritura, PEIRCE enuncia las reglas de transformación que permiten las manipulaciones gráficas. Son verdaderas reglas de inferencia en la medida que su aplicación conserva la verdad del gráfico (Cf. Ms. 455). Estas reglas, expuestas de forma muy clara en C.P. 4.505-509, son aquí cinco. De hecho, ya se ha visto que dos de ellas (Cf. C.P. 4.507 y 509) aparecen más bien como reglas de formación. Quedan pues tres reglas que vamos a presentar con brevedad.

La primera, que representaremos por medio de R_1, se llama regla de *"inserción"* y de *"eliminación"* (Cf. C.P. 4.505).

– *Inserción: R_1 (ins.).* Se puede inscribir cualquier gráfico sobre una superficie dada si está cercada por un número impar de cortaduras[125].

Por ejemplo:

es decir, en notación moderna: $\neg P \vdash \neg (Q \wedge P)$.

[124] Y los gráficos se leerán desde el exterior (parte menos cercada) hacia el interior (parte más cercada), conforme a un método general que PEIRCE a veces llama "endoporeútica" (C.P. 4.568).

[125] Para la traducción a una notación moderna utilizaremos los signos $\neg$, $\wedge$, $\Rightarrow$ respectivamente para la negación, la conjunción y la implicación. El sentido del término gráfico, aquí utilizado, se precisará más adelante por medio de las reglas de formación, que daremos a conocer explícitamente en la pág. 60.

Generalizando la regla R_1 *(ins)* hasta un número cualquiera de cortaduras se enunciará (si C_0 representa una sucesión –que puede ser vacía– de conjunciones) así:

$$C_0 \wedge \neg(C_1 \wedge \neg(C_2 \wedge \ldots \neg C_t \ldots)) \vdash C_0 \wedge \neg(C_1 \wedge \ldots \neg(C_d \wedge A \wedge \ldots \neg C_t \ldots))$$

donde $d = 2l + 1$.

– *Eliminación:* R_1 *(el)* se puede eliminar un gráfico cercado por un número par (o nulo) de cortaduras.

$$P\,Q \vdash P$$

es decir: $P \wedge Q \vdash P$.

La generalización de la regla R_1 *(el.)* podría enunciarse así:

$$C_0 \wedge \neg(C_1 \wedge \ldots \neg(C_d \wedge A \wedge \ldots \neg C_t \ldots)) \vdash C_0 \wedge \neg(C_1 \wedge \ldots \neg(C_d \wedge \ldots \neg C_t \ldots))$$

donde $d = 2l$.

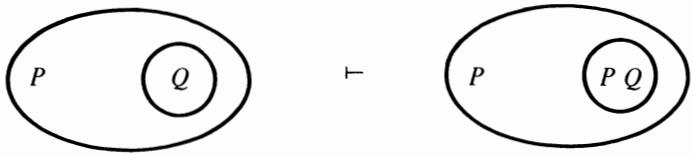
La segunda regla, R_2, se llama regla de *"iteración"* y de *"desiteración"* (Cf. C.P. 4.506).

– *Iteración:* R_2 *(it)*. Todo gráfico ya dado puede volver a escribirse, sea en la misma superficie que el primero, sea sobre una superficie (ya dada) rodeada de un número superior de cortaduras.

Así: $$P \vdash P\,P$$

es decir: $P \vdash P \wedge P$.

Y también:



es decir: $$P \Rightarrow Q \vdash P \Rightarrow (P \wedge Q)$$

o generalizándola

$$C_0 \wedge \neg(C_1 \wedge \ldots \neg(C_d \wedge A \wedge \neg(C_g \wedge \ldots \neg C_t \ldots))) \vdash C_0 \wedge \neg(C_1 \wedge \ldots \neg(C_d \wedge A \wedge \neg(C_g \wedge \ldots \neg(C_n \wedge A \wedge \ldots \neg C_t \ldots))))$$

donde $d \leqslant n \leqslant t$.

– *Desiteración: R_2 (desit.)*. Toda repetición de un gráfico puede borrarse. Tenemos pues, a la inversa, los esquemas siguientes:

$$P\,P \vdash P$$

es decir: $P \wedge P \vdash P$.

y

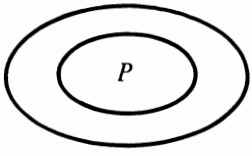
es decir: $P \Rightarrow (P \wedge Q) \vdash P \Rightarrow Q$.

O generalizando:

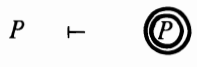
$$C_0 \wedge \neg(C_1 \wedge \ldots \neg(C_d \wedge A \wedge \neg(C_g \wedge \ldots \neg(C_n \wedge A \wedge \ldots \neg C_t \ldots))))$$
$$\vdash C_0 \wedge \neg(C_1 \wedge \ldots \neg(C_d \wedge A \wedge \neg(C_g \wedge \ldots \neg(C_n \wedge \ldots \neg C_t \ldots))))$$

donde $d \leqslant n \leqslant t$.

La regla R_3 se llama regla de *"doble cerramiento"* (C.P. 4.508) o de la doble cortadura. La doble cortadura es la figura formada por dos cortaduras encajadas una en la otra, si no hay nada inscrito sobre la superficie comprendida entre las dos cortaduras. Así, en la siguiente figura se ha inscrito una doble cortadura alrededor del gráfico P:



La regla R_3 establece que esta doble cortadura tanto puede estar situada alrededor de todo gráfico (cf. C.P. 4.415), como puede ser borrada de la superficie en que se presenta (Cf. C.P. 4.508):



es decir: $P \vdash \neg\neg P$.

Por lo mismo: $\vdash P$

es decir: $\neg\neg P \vdash P$.

Esta regla equivale a la regla de doble negación. Se podría representar por medio de los dos esquemas siguientes (donde el signo + representa la equideductibilidad):

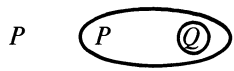
$$C_0 \wedge \neg(C_1 \wedge \ldots \neg(C_d \wedge \ldots \neg C_t \ldots)) + C_0 \wedge \neg(C_1 \wedge \ldots \neg\neg\neg(C_d \wedge \ldots \wedge C_t))$$

y

$$C_0 \wedge \neg(C_1 \wedge \ldots \neg(C_d \wedge A \wedge \ldots \neg C_t)) + C_0 \wedge \neg(C_1 \wedge \ldots \neg(C_d \wedge \neg\neg A \wedge \ldots \neg C_t \ldots))$$

Para ilustrar la utilización de estas tres reglas trataremos de demostrar el modus ponens: éste establece que de *"P"* y "si *P* entonces *Q*" se puede inferir *"Q"*, o gráficamente:

El procedimiento que debe seguirse es el siguiente:

1			Premisas
2			R_2 (desit.)
3	P	Q	R_3
4	Q		R_1 (el.)

No parece que PEIRCE haya pensado en utilizar Alfa como sistema deductivo[126]. Como más adelante se verá, PEIRCE parece haber inventado los gráficos existenciales sobre todo para proveer al análisis lógico de una nueva herramienta. Sin embargo, la presentación que PEIRCE hace de su sistema sugiere la idea de transformarlo en sistema deductivo, sistema cuyas propiedades principales, para terminar, investigaremos seguidamente.

---

[126] Aunque la idea de una presentación deductiva de los gráficos existenciales aparezca muy claramente en C.P. 4.481.

2.23. Alfa como sistema deductivo

La presentación de Alfa como sistema deductivo nos obliga ante todo a constituir rigurosamente su lenguaje:

a) Para lo cual se precisará el alfabeto utilizado. En el sistema Alfa pueden distinguirse los siguientes tipos de signos:

– Las variables enunciativas *P, Q,* ... inscritas sobre la hoja de aserción.

– Las constantes lógicas: la conjunción simbolizada por la yuxtaposición de dos gráficos y la negación, simbolizada por la cortadura (elegiremos en efecto, como símbolo primitivo, la cortadura en lugar de la voluta).

– El término vacío Λ.

b) Se darán luego las reglas de formación de las expresiones bien formadas del sistema. Estas reglas podrían enunciarse como sigue:

S1 – Toda variable enunciativa es un gráfico bien construido (en adelante el símbolo *gbc*).

S2 – Si *A* y *B* son *gbc* entonces *A B* es un *gbc*.

S3 – El término vacío Λ es un *gbc*. Sustituye a la hoja de aserción de la cual posee la misma propiedad, a saber, la neutralidad respecto de la yuxtaposición arriba definida. De ahí que, por otra parte, aunque nuestra notación canónica contenga el término vacío, no escribiremos de hecho más que los términos reducidos.

S4 – Si *A* es un *gbc* entonces Ⓐ es un *gbc* obtenido al rededor *A* con una cortadura no secante con otras cortaduras[127].

S5 – No son *gbc* más que los gráficos construidos a partir de las reglas precedentes.

c) Se enunciarán las reglas de traducción que permiten el paso de la escritura peirciana a la escritura usual con paréntesis:

$$
\begin{array}{ll}
T_1 & A \longrightarrow A \\
T_2 & \alpha\beta \longrightarrow (\alpha \wedge \beta) \\
T_3 & \Lambda \longrightarrow A \Rightarrow A \\
T_4 & \textcircled{\alpha} \longrightarrow \neg\alpha
\end{array}
$$

[127] La noción de gráfico rodeado de una cortadura es una noción intuitiva admitida por PEIRCE como si fuera clara por sí misma. En el terreno de lo práctico no parece plantear problemas de comprensión ni de lectura, en el sentido de que todo lector sabe reconocer si un gráfico está situado en el interior o en el exterior de una cortadura. Bien es verdad que podría precisarse las nociones topológicas subyacentes a esta noción de interior pero ha de reconocerse que no juegan aquí papel alguno. Debe sin embargo notarse que una descripción matemática relativamente simple de la noción de interior la lograremos con la utilización, en el plano euclideano, de las cortaduras que serían círculos (pero esto nos alejaría un tanto de la presentación peirciana).

donde A representa una variable proposicional y α y β gráficos. Puesto que la noción de interior no plantea problemas en el plano práctico, puesto que la forma de la cortadura y la posición de los gráficos en el espacio no juegan papel alguno y puesto que sólo interviene el número de cortaduras que rodean un gráfico, podemos prescindir de una teoría de doblamiento sobre un eje y contentarnos con juntar los gráficos en cualquier orden por medio de la conjunción. La única cosa que debe señalarse es la falta de univocidad de la traducción, pero esta última no plantea problema alguno en virtud de la asociatividad y conmutatividad de la conjunción.

La presentación que PEIRCE hace de Alfa nos lleva a pensar que este sistema no utiliza más que reglas (las arriba enunciadas, pp. 61-64) y que se trata por tanto de un sistema de deducción natural. Ya habíamos encontrado este tipo de sistema en el ensayo algebraico de 1880. PEIRCE utilizaba en él la regla de introducción de la implicación. Esto nos ha sugerido la idea de adjuntar esta última regla a las tres precedentes[128]. Hemos señalado pues que Alfa una vez completado de esta manera –lo llamaremos Alfa*– constituía un sistema proposicional consistente y completo (la completud se entiende aquí tanto en su sentido débil como en su sentido fuerte).

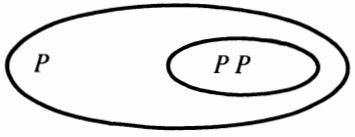
La manera más simple de demostrarlo es demostrar que Alfa* es deductivamente equivalente a un sistema cuya consistencia y completud se conoce por otro camino. Tomaremos como sistema de referencia el de ROSSER[129] que utiliza tres esquemas de axiomas y una regla de inferencia:

1. $P \Rightarrow (P \wedge P)$
2. $(P \wedge Q) \Rightarrow P$
3. $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg(Q \wedge R) \Rightarrow \neg(R \wedge P))$

Regla *R: Modus Ponens.*

Nuestro primer problema consiste en traducir este sistema a un lenguaje gráfico. Esta traducción es fácil de realizar utilizando los dos operadores primitivos del sistema Alfa* y la definición de la implicación a partir de estos últimos. Se obtiene entonces el siguiente sistema:

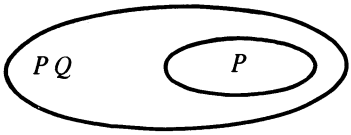
A_1



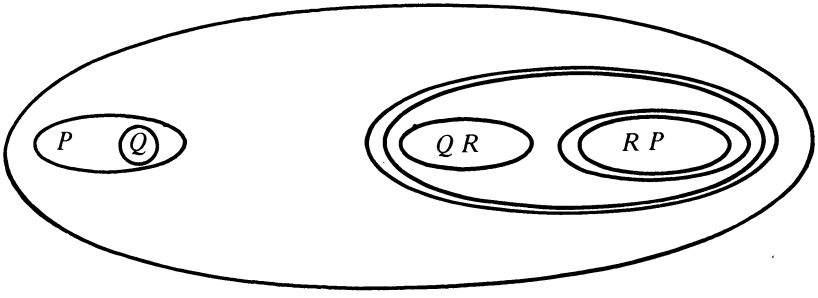
[128] Podría expresarse bajo la forma: Si $M\,P \vdash Q$ entonces $M \vdash$

[129] ROSSER, *Logic for Mathematicians* (N.Y.: 1953), cap. 4, p. 55.

A_2



A_3



Regla *R*: P $\vdash Q$

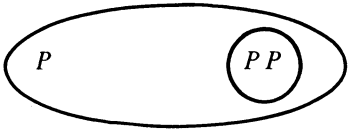
Es evidente que esta nueva forma de escribirlos en nada modifica la completud del sistema inicial pues de la misma manera en que hemos vuelto a escribir los axiomas de ROSSER, podríamos volver a escribir las demostraciones de los teoremas y reglas que de ellos se derivan.

La primera etapa de nuestra demostración va a consistir en derivar A_1, A_2, A_3, y R de Alfa*. Las demostraciones son las siguientes:

A_1

1. por R_2 (it.) $\quad P \vdash P\ P$

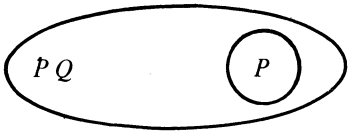
2. por R_4



A_2

1. por R_1 (el.) $\quad P\ Q \vdash P$

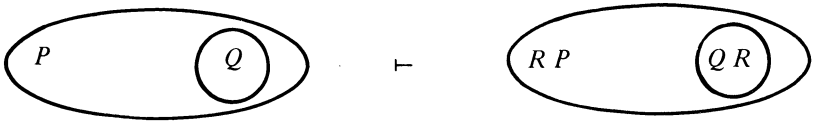
2. por R_4



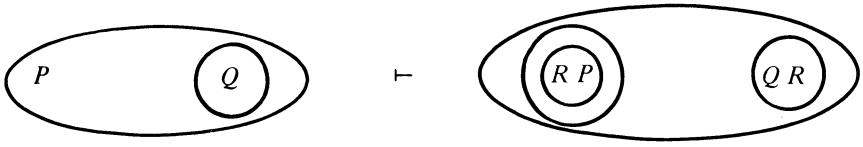
A_3

1. por R_1 (ins.)

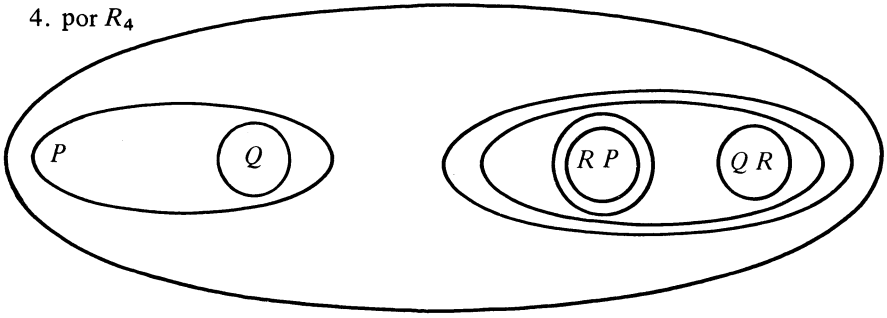
2. por R_2 (it.)



3. por R_3



4. por R_4



R: Esta regla ya ha sido demostrada arriba en la p. 64.

La segunda etapa de nuestra demostración consiste pues en derivar Alfa* a partir del sistema de ROSSER. La completud de este útlimo sistema nos permite utilizar ante todo las dos tesis siguientes:

$$P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$$
$$(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \Rightarrow R))$$

a partir de las cuales (por medio del modus ponens) es fácil derivar la regla de introducción de la implicación. No presentaremos la demostración, que ya es clásica[130]. Además, a partir de la definición de la noción de consecuencia, fácilmente se demostrará la regla de eliminación de la implicación en la consecuencia que, aplicada a ciertas tesis de ROSSER, nos permite engendrar las reglas R_1 (el.), R_1 (ins.), R_2 (it. y desit.) y R_3 que corresponden todas ellas a esquemas de deducción válidos (no haremos la demostración –que es fácil– de la validez de estas reglas).

Al ser deductivamente equivalentes los dos sistemas, Alfa* aparece pues como un sistema consistente y completo de deducción natural. Es interesante señalar que el sistema de GENTZEN requiere un número más elevado de reglas para la lógica enunciativa. No hay mejor manera de mostrar el interés del sistema Alfa*.

Sin embargo, podríamos aproximarnos todavía más a la presentación peirciana si interpretáramos Alfa como un sistema axiomático ordinario. Ya hemos visto que en PEIRCE la hoja de aserción es un gráfico (cf. C.P. 4.396). Puesto que no puede ser derivada de otros gráficos, puede considerársela, según lo sugiere ZEMAN (*op. cit.*, p. 46), como un axioma. Tomaremos pues como axioma el término vacío Λ introducido más arriba[131]. Se observa entonces que el sistema, constituido por el término vacío como axioma y las tres reglas R_1, R_2 y R_3, es consistente y completo (el nuevo sistema se llamará Alfa**).

Utilizaremos el mismo esquema de demostración que precede. Las derivaciones de A_1, A_2, A_3 y R a partir del sistema de PEIRCE pueden presentarse como sigue:

A_1

1. Por el axioma se establece el término vacío:

$$\Lambda$$

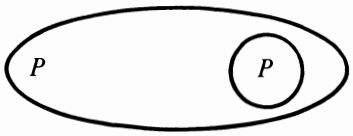
2. Por R_3

[130] Cf. E.W. BETH, *The Foundations of Mathematics* (N.Y.: 1966), pp. 207-208.

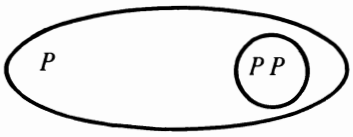
[131] Al cual, en la interpretación, asociaremos la tesis $A \Rightarrow A$ del cálculo de enunciados.

Lo cual se escribirá, en adelante, con escritura reducida:

3. Por R_1 (ins) y R_2 (it)

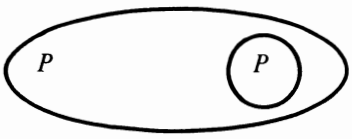


4. por R_2 (it)

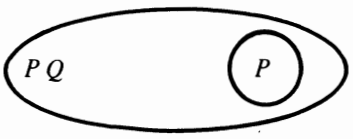


A_2

1. Por las tres primeras etapas de la demostración precedente:

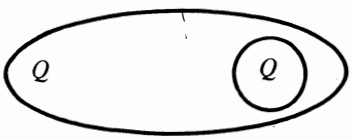


2. por R_1 (ins.)

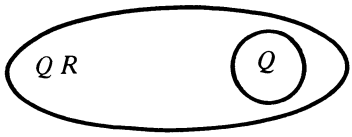


A_3

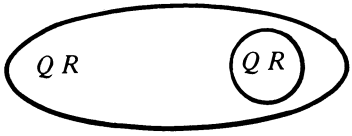
1. cf. arriba:



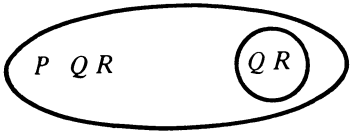
2. por R_1 (ins. de R)



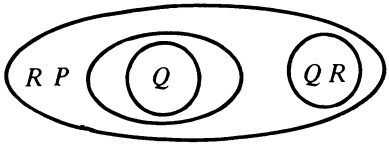
3. por R_2 (it. de R)



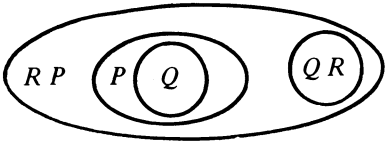
4. por R_1 (ins. de P)



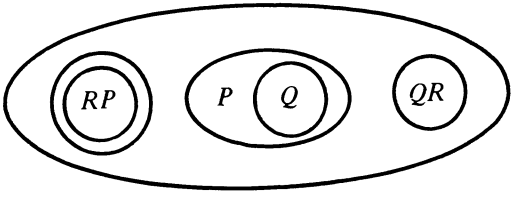
5. por R_3 (alrededor de Q)



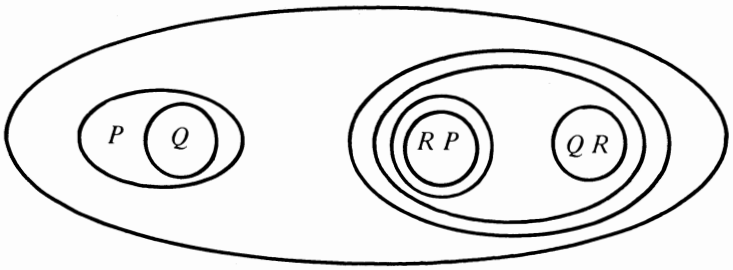
6. por R_2 (it. de P)



7. por R_3 (alrededor de $R\,P$)



8. por R_3 (alrededor de las partes extremas del gráfico reunidas)



R: Igual demostración que para Alfa*.

Para derivar Alfa** del sistema de ROSSER, bastará observar que el axioma de Alfa** representa una tesis de ROSSER y que la regla de eliminación de la implicación en la consecuencia nos permite demostrar las reglas de Alfa** que corresponden todas ellas a esquemas de consecuencia válidos.

Alfa** se presenta pues como un sistema completo y consistente de axioma único, de una simplicidad notoria si se compara con otros sistemas del mismo tipo utilizados en lógica enunciativa ordinaria. El sistema de ŁUKASIEWICZ de 1936 (válido solamente para el cálculo enunciativo sin negación) y el de NICOD de 1917 (válido para el conjunto del cálculo enunciativo) utilizan cada uno de ellos un axioma relativamente complejo[132]. Bien es verdad que utilizan un número menos elevado de reglas[133], pero la complejidad del axioma utilizado hace que las demostraciones sean relativamente más largas que en Alfa**. El sistema, que, en el plano de los axiomas, se aproxima más a Alfa** es, sin lugar a dudas, el de HILBERT y ACKERMANN, cuyo axioma único es $P \vee \neg P$ (el mismo que en Alfa** por tanto), pero utiliza seis reglas que, en su mayor parte, son más complejas que las reglas de Alfa**[134].

Debe ciertamente repetirse que PEIRCE no ha desarrollado Alfa como sistema de deducción natural o axiomática. Pero tal desarrollo no nos parece contrario al es-

---

[132] Para ŁUKASIEWICZ, Cf. "The shortest axiom of the Implicational calculus of propositions", *Proceedings of the Royal Irish Academy*, LII (1948), pp. 25-33. En 1936 utiliza el axioma: *CCCpqrCCrpCsp*. El axioma de NICOD utiliza un solo funtor, la incompatibilidad:

$$[p \mid (q \mid r)] \mid [(t \mid (t \mid t)) \mid ((s \mid q) \mid ((p \mid s) \mid (p \mid s)))]$$

Aparece en *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 19 (1917/19) pp. 32-41.

[133] ŁUKASIEWICZ utilizaba dos reglas: modus ponens y substitución. NICOD utilizaba igualmente la substitución pero un modus ponens diferente: de $p \mid (q \mid r)$ y p infiérase r. Debe notarse que puede hacerse dispensa de la substitución en una formulación que utilice esquemas de axiomas.

[134] Una de ellas equivale a R_3. Cf. D. HILBERT y W. ACKERMANN, *Principles of Mathematical Logic* (N.Y. 1950), p. 30 (traducción de Grundzüge der theoretischen Logik).

píritu de PEIRCE (cf. C.P. 4.481). Es interesante notar que cincuenta y cuatro años antes que GENTZEN y JASKOWSKI, PEIRCE utiliza la regla de introducción de la implicación como regla primitiva de inferencia[135] en uno de sus sistemas algebraicos, como ya se ha visto. Además la utilización de la hoja de aserción como axioma parece implícito en la obra de PEIRCE en la medida en que es un gráfico y no puede derivarse de ningún otro gráfico. En todos los casos nos asombra el grado de acabamiento a que puede ser llevado, con un mínimo de transformaciones, el sistema Alfa de los gráficos existenciales, pero es claro que PEIRCE nunca tuvo conciencia de las propiedades de su sistema.

[135] Su utilización como regla primitiva de inferencia para el cálculo enunciativo aparece en 1934: Cf. S. JASKOWSKI, "On the Rules of Suppositions in Formal Logic", *Studia Logica*, I (Varsovia: 1934); G. GENTZEN, "Untersuchungen über das logische Schliessen", *Mathematische Zeitschrift*, 39 (1934/1935), pp. 176-210, 405-431. Pero, como hemos visto, PEIRCE lo utiliza en este sentido en 1880 (Cf. C.P. 3.182). Además la sobreentiende en C.P. 3.171 y la emplea indebidamente a propósito del tercer icono en 1885 (Cf. C.P. 3.380) como ya se ha notado.

Capítulo II

LA LOGICA DE LOS "RELATIVOS"

LA LOGICA DE LOS "RELATIVOS"

Al asimilar, como ya se ha visto en el capítulo precedente (cf. p. 34), la cópula condicional a la cópula de predicación silogística, PEIRCE subrayaba la unidad de las proposiciones condicionales y de las proposiciones categóricas, y de esta forma abrazaba, en una visión unitaria, a la vez el cálculo de enunciados elementales y el que, más tarde, se llamará de predicados de primer orden. El examen de las aportaciones peircianas a este nuevo cálculo nos lleva a estudiar de manera general su teoría de los *"términos relativos"*, que aparece en 1870 en un artículo cuyo carácter innovador subrayaba PEIRCE en 1903: *"En 1870 he ofrecido una contribución tal sobre este sujeto que ningún especialista sobre el tema podrá negar que ha sido el trabajo más importante jamás realizado, excepción hecha del trabajo original de BOOLE"* (C.P. 3, p. 27, citado en una nota por el editor). Como lo hicimos con la lógica de enunciados, enfocaremos este estudio en el doble plano algebraico y gráfico.

1. LA FORMULACION ALGEBRAICA

1.1. La noción de "relativo general"

La noción de *"relativo"* introducida al principio del artículo de 1870, no se corresponde totalmente con la noción general de relación tal como hoy se entiende[1]. Pero al final del artículo la noción de *"relativo"* se precisa considerablemente y tiende a confundirse con la noción moderna de relación. PEIRCE va a definir, en efecto, las relaciones (en el caso de las relaciones binarias)[2] como clases de parejas, haciendo para las relaciones lo que BOOLE había hecho para los sujetos y los predicados clásicos: de la misma manera que las cualidades habían sido asimiladas por BOOLE a clases de objetos que poseen estas cualidades, las relaciones van a ser asimiladas por PEIRCE a clases de parejas de objetos entre los cuales se dan estas re-

[1] Cf. C.P. 3.65: "Me propongo asignar números a todos los términos lógicos; a un término absoluto, el número de individuos que designa; a un término relativo al número medio de las cosas... relacionadas con un individuo."

[2] Que a menudo llama "dual relations" (Cf. C.P. 3.219).

laciones. PEIRCE definirá entonces la relación binaria R como la suma lógica de las parejas $(A : B)$ de objetos A y B tales que A es un R de B, o, para recoger el lenguaje de PEIRCE de 1880, el "relativo general" se expresará como la suma lógica de todos los *"relativos individuales"* $(A : B)$:

$$R = \Sigma\,(A : B) \qquad \text{C.P. } 3.223^{3}$$

Interesa especialmente subrayar la manera en que es introducido el *"relativo general"*, pues utiliza un procedimiento matricial. Se sabe que tal procedimiento se usará más tarde para desarrollar de manera sistemática el cálculo de relaciones[4]. Sin embargo, en PEIRCE, las matrices no parecen intervenir más que a título de ilustraciones, como se ve en C.P. 3.220 donde PEIRCE da el siguiente ejemplo de repartición de *"relativos individuales binarios"* en un cuadro infinito[5]:

"$A : A$	$A : B$	$A : C$	$A : D$	$A : E$	etc.
$B : A$	$B : B$	$B : C$	$B : D$	$B : E$	etc.
$C : A$	$C : B$	$C : C$	$C : D$	$C : E$	etc.
$D : A$	$D : B$	$D : C$	$D : D$	$D : E$	etc.
$E : A$	$E : B$	$E : C$	$E : D$	$E : E$	etc.
etc.	etc.	etc.	etc.	etc."	

El hecho de que PEIRCE no se limite al caso finito[6] muestra claramente que no pretendía utilizar las matrices para un desarrollo efectivo de su cálculo de relativos. Hay que añadir que en la época en que PEIRCE introdujo una notación matricial para la lógica de relaciones todavía no conocía la obra de CAYLEY[7].

La suma de los *"relativos individuales"* que PEIRCE expresa en 1880 bajo la for-

---

[3] La idea de una suma lógica de relativos aparece a partir de 1870 (Cf. C.P. 3.121).

[4] Cf. IRVING M. COPILOWISH, "Matrix Development of the Calculus of relations", *Journal of Symbolic Logic*, 13 (1948).

[5] La presentación por medio de matrices aparece desde 1870 (Cf. C.P. 3.136). En 1880 (Cf. C.P. 3.220) y 1882 (Cf. C.P. 3.317) PEIRCE considera la posibilidad de utilizar cubos para las relaciones triádicas. El hecho de que PEIRCE no propusiera una generalización más perfecta parece ser una consecuencia de su creencia en que las relaciones de grado más elevado pueden ser reducidas a combinaciones de relaciones triádicas, como más adelante veremos.

[6] Cf. también C.P. 3.306: "Sean *A, B, C,* etc., que designan objetos de cualquier especie. Se puede concebir que estas letras sean en número infinito o finito."

[7] Como PEIRCE escribe a modo de post scriptum a su artículo de 1882: "He tenido hoy el placer de leer por primera vez la *Memoir on Matrices* del Profesor CAYLEY aparecida en las *Philosophical Transactions* de 1858 [*Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 48 (1858), Section I, pp. 17-37]. El álgebra que en él describe me parece en lo esencial idéntica a los largos desarrollados que yo he hecho tras del álgebra de los relativos binarios" (C.P. 3.321). En 1903 escribe: "Imagínense que todas las diadas (o parejas ordenadas) de individuos del universo están dispuestos en una *matriz* (término de CAYLEY, aunque el autor fue el primero en aplicar el concepto a la lógica de los relativos)..." (C.P. 3.591).

ma $\Sigma\ (A : B)$ recibe, en 1883, una nueva formulación: *"Puede concebirse un relativo general como la suma lógica de un cierto número de relativos individuales de este tipo. Si se representa "enamorado" por l, puede entonces escribirse:*

$$l = \Sigma_i \Sigma_j (l)_{ij}\ (I : J)$$

donde $(l)_{ij}$ es un coeficiente numérico de valor 1 caso de que I esté enamorado de J, y 0 en el caso contrario y donde las sumas deben referirse a todos los individuos del universo" (C.P. 3.329)[8]. Esta nueva formulación presenta algunas dificultades de interpretación. Da la impresión de que $(l)_{ij}$ aparece aquí como una especie de función característica de la relación. Mientras que, en la formulación precedente, A y B en $(A : B)$ representaban elementos[9], nos parece aquí que I y J deberían designar las clases e $(I : J)$ su producto cartesiano[10]. Conforme a esto $(l)_{ij}$ jugaría el papel de un operador de selección que elegiría en $I \times J$ las parejas $\langle i, j \rangle$ de elementos que verifican la relación y nos dan, por ello mismo, no la relación l, sino –en lenguaje moderno– su grafo.

A pesar de sus ambigüedades[11], la noción peirciana de relación como clases de parejas ordenadas testifica un importante progreso realizado por PEIRCE sobre la formulación morganiana de la lógica de relaciones[12]. PEIRCE era, sin embargo, consciente de su deuda para con el que llamaba *"uno de los mejores lógicos que jamás ha existido y, sin discusión, el padre de la lógica de los relativos"* (C.P. 3.402) y, de hecho, algunos pasajes de DE MORGAN aparecen como verdaderas anticipaciones de la noción de *"relativo general"*[13]. Esta última será recogida en particular por SCHRÖDER en 1895[14] que, por cierto, utiliza fórmulas a menudo muy próximas a las de PEIRCE[15].

---

[8] Es de notar que una fórmula casi igual aparece el año anterior en C.P. 3.310 en "Brief description of the Algebra of relatives" (1882).

[9] Cf. C.P. 3.220: "Un relativo individual se refiere a un sistema cuyos miembros son en su totalidad individuales."

[10] Que podría notarse por medio de $I \times J$ para distinguirlo del "relativo individual" $(I : J)$.

[11] Ambigüedades que, sin embargo, no existen en la formulación de 1880 dada más arriba.

[12] En la obra de DE MORGAN el primer estudio sistemático de las relaciones aparece en la segunda sección titulada: "First elements of a system of Logic" del tercer artículo escrito en 1858 y publicado en las *Transactions of The Cambridge Philosophical Society*. Un estudio más detallado aparece en el cuarto artículo de 1859, titulado: "On the Syllogism IV and on the Logic of Relations", aparecido en la misma revista en 1864, pp. 331-58. En su artículo de 1870 PEIRCE se refiere expresamente a este último artículo (Cf. C.P. 3.45).

[13] Cf. en particular el texto siguiente extraído del tercer artículo de 1858 (p. 208): "Las relaciones poseen a la vez una extensión y una comprensión. Así... la relación de primo hermano es la *suma* de hijo de tío, hija de tío, hijo de tía, hija de tía."

[14] E. SCHRÖDER, *Vorlesungen über die Algebra der Logic, III* (Leipzig: 1895). SCHRÖDER ha hecho un interesante resumen de su doctrina de los relativos en el artículo "On pasigraphy", *The Monist* (1899), pp. 44-62 donde reconoce por cierto su deuda para con PEIRCE (p. 52).

[15] SCHRÖDER, *op. cit.*, III, § 1-3.

1.2. El cálculo de relativos binarios

Una vez definida la noción general de relación hay que entrar en el cálculo de relaciones propiamente dicho, buscando las operaciones que permiten expresar nuevas relaciones a partir de símbolos de relaciones dados. El artículo de 1870 es particularmente interesante a este respecto, pues nos da a conocer el espíritu con que PEIRCE empieza a interesarse por semejante investigación. Desde el principio del artículo (Cf. C.P. 3.46) PEIRCE nos dice que va a guiarse por principios de analogía. Y para él, el nombre de una operación cuando es aplicado por analogía a una operación semejante en otro dominio, debería aplicarse de tal manera que las dos operaciones puedan ser construidas como caso de una operación unificada más general, que lleva el mismo nombre, y cuyo dominio abarcaría los dominios de las dos operaciones en cuestión. El problema está pues en buscar una concepción única, adecuada a las dos operaciones. Para la multiplicación PEIRCE adopta entonces, como única concepción, la noción de *"aplicación de una relación, de tal manera que, por ejemplo, lw designará todo cuanto hay de enamorado en una mujer"* (C.P. 3.68). PEIRCE muestra en efecto en C.P. 3.61 que este concepto de multiplicación está de acuerdo con la multiplicación numérica puesto que, por ejemplo, "3 x 2" puede leerse, dice, como *"terno de pares"* (hoy más bien hablaríamos de la aplicación que asocia a los dos conjuntos su producto cartesiano). Concebida de esta forma, la multiplicación se aplica también a expresiones matemáticas como "sen α", "log α", "dx", etc., tal como lo muestra PEIRCE en este mismo artículo. Además PEIRCE, de una manera muy ingeniosa, se las arregla para construir el producto lógico de las clases m y b, escrito "m, b" en su notación de 1870, como casos de la multiplicación general descrita: *"Puesto que nuestra concepción de la multiplicación se reduce a la aplicación de una relación, no podemos multiplicar dos términos absolutos más que si se los considera como relativos. Ahora bien, el término absoluto "hombre" es sin duda el equivalente exacto del término relativo "hombre que es" y lo mismo sucede para cualquier otro término absoluto. Colocaré una coma detrás de todo término absoluto para indicar así que es considerado como un término relativo"* (C.P. 3.73). PEIRCE, pues, considera aquí la coma como si expresara una operación monádica sobre el término al que se aplica, de tal manera que "m" representa el relativo "m que es". De la misma manera que "lw" significa "l de un w", igualmente "$(m,)\ b$" o "m, b" significa "m que es b", es decir la parte común o el producto lógico de m y de b.

Es patente que para la multiplicación relativa PEIRCE recoge la misma convención que DE MORGAN[16]. SCHRÖDER reprochará a PEIRCE su notación que juzga equívoca y poco significativa[17]. Propone utilizar el signo ";" que, por ser asimé-

[16] Aunque, dice PEIRCE, DE MORGAN "parece no haber pensado en la multiplicación" (C.P. 3.68). Debe notarse que CAYLEY (1854) utilizaba el producto relativo y la conserva, pero aplicados a un tipo particular de relaciones, a saber, las funciones (en el sentido matemático del término) cuyas conversas son funciones.

[17] E. SCHRÖDER, *op. cit.*, III, pp. 33-34.

trico, expresa mejor el carácter no conmutativo de la multiplicación relativa[18]. Esta última, en efecto, si bien es asociativa y distributiva en relación a la suma lógica (C.P. 3.53 y 3.68) –lo cual hace que *"las condiciones absolutas de la multiplicación se satisfagan"* (C.P. 3.68)–, no es conmutativa (C.P. 3.53). Esta conmutatividad es por el contrario conservada por la multiplicación *lógica* de los relativos.

Al introducir la multiplicación no parece que PEIRCE observe un concepto verdaderamente unificador como en el caso de la multiplicación. En el artículo de 1870 se limita a la suma lógica de clases o de relativos. Hasta 1883 no introduce una operación que llama suma relativa (Cf. C.P. 3.332), simbolizada por *"$l \dagger b$"*[19] y que puede leerse: *"Enamorados de todo salvo de los bienhechores"* (C.P. Ibid.). No se encuentra en los lógicos anteriores una operación análoga. Parece como si la elección de PEIRCE hubiera sido guiada por el deseo de conservar el modelo proporcionado por las reglas de dualidad de DE MORGAN para el cálculo de los términos absolutos. En efecto, en C.P. 3.336, después de haber dado las fórmulas clásicas de dualidad, aplica estas últimas a la suma y a la multiplicación relativas[20]:

$$\overline{l \dagger b} = \bar{l}\ \bar{b}$$
$$\overline{l\,b} = \bar{l} \dagger \bar{b}$$

cosa que explicaría la aplicación del término de *"suma"* a la nueva operación. Desde 1880 PEIRCE había experimentado la necesidad de introducir una cierta simetría en su cálculo. Por entonces había utilizado una operación llamada *"transadición"*, simbolizada por *"$l \circ b$"* y definida como *"$\bar{l}\ \bar{b}$"* (C.P. 3.242-3-4). Pero en 1883 abandona esta operación en favor de su negación: la adición relativa así obtenida aportaba al sistema la verdadera simetría deseada por PEIRCE.

En 1870 PEIRCE introdujo una segunda operación relativa, conocida por DE MORGAN[21], y que conserva en sus artículos ulteriores: se trata de la operación de conversión. La operación apenas es mencionada en 1870 (Cf. C.P. 3.147). PEIRCE la recoge en 1880 y la simboliza por medio de $\breve{K} - l$ (C.P. 3.223). En el mismo artículo utiliza también un nuevo simbolismo *"$\breve{l}$"* (C.P. 3.243) que conservará más adelante. Pero hasta 1883 no desarrolla sus leyes (C.P. 3.328-347).

En 1870 PEIRCE había introducido también otras dos operaciones relativas que

---

[18] Los *Principia Mathematica* utilizan nuevos símbolos: si l significa "enamorado de", b, "bienhechor de" y w "mujer" tendremos los dos productos relativos: l"w (correspondiente al lw de PEIRCE) y $l \mid b$ (para el lb de PEIRCE).

[19] Operación que podría interpretarse en lenguaje moderno como el producto cartesiano $(V \cap l) \times (V - b)$ donde V es la clase universal, l la clase de los enamorados y b la de los bienhechores. La operación $b \dagger b$ es simbolizada por medio de $l \wr b$ por SCHRÖDER para mostrar su carácter no conmutativo (Cf. SCHRÖDER, *op. cit.*, III, p. 33). Con lo cual quizás se explica que en 1897 PEIRCE utilice, él también, un signo disimétrico $\wr$ (Cf. C.P. 3.493).

[20] La negación utilizada aquí es análoga a la utilizada en el cálculo de clases.

[21] Y también por CAYLEY (1854): Cf. arriba nota 16.

llama, por analogía con las operaciones matemáticas correspondientes (Cf. C.P. 3.614), operaciones *"de involución"*. La primera, llamada de involución *"ordinaria"* (C.P. 3.113) ó *"progresiva"* (C.P. 3.614) se simboliza por x^y y significa *"todo lo que es un x para todo individuo de y"* (C.P. 3.77). Ya era conocida por DE MORGAN que la simbolizaba por medio de XY'[22]. Si s, l, w representan respectivamente "servidor de", "enamorado de" y "mujer", las expresiones "l^w" y "$(s^l)^w$" representarán respectivamente *"enamorado de toda mujer"* y *"todo lo que, con relación a cada mujer está en la relación de servidor de cada uno de los enamorados de esta mujer"* (C.P. 3.77). Si W', W'', W''' representan los miembros individuales de la clase w, el producto relativo puede entonces escribirse[23]:

$$sw = s(W' + W'' + W''' + \text{etc.}) = sW' + sW'' + sW''' + \text{etc.}$$

Es decir que el *"servidor de una mujer"* es o *"servidor de W'"*, o *"servidor de W''"* o *"servidor de W'''"*, etc.; de la misma manera el *"servidor de toda mujer"* será *"servidor de W'"* y *"servidor de W''"* y *"servidor de W'''"*, etc., cosa que se expresará bajo la forma:

$$s^w = s^{(W' + W'' + W''' + \text{etc.})} = (s^{W'}) \times (s^{W''}) \times (s^{W'''}) \times \text{etc.}$$

(Cf. C.P. 3.97). Siguiendo ciertas analogías matemáticas PEIRCE utiliza entonces Σ' para representar la suma lógica y Π' para el producto lógico (Cf. C.P. 3.97)[24]. Puede por tanto escribir que (Cf. C.P. 3.97):

$$\Pi' \prec \Sigma'$$

y por ende que:

$$s^w \prec sw \quad \text{si} \quad w > 0$$

lo cual significa que la clase de los *"servidores de toda mujer"* está contenida en la clase de los *"servidores de una mujer"*. De esta ley pueden derivarse numerosas consecuencias:

$$(ls)^w \prec lsw \qquad \text{(C.P. 3.97)}$$

"el que está, con relación a toda mujer, enamorado de una de sus servidoras está enamorado de una servidora de una mujer". Igualmente:

---

[22] C.F. en especial "On The Syllogism IV and on the Logic of Relations", *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* (1864), p. 342.

[23] Se utilizará en este capítulo el simbolismo de 1880, es decir que + y x representan respectivamente la suma y el producto lógicos.

[24] Es la primera vez que PEIRCE utiliza Π' en este sentido. En 1867 ya había empleado el signo Σ sólo para representar una suma lógica (Cf. C.P. 3.21).

$$l^{s^w} \prec ls^w \qquad \text{(C.P. ibid.)}$$

"un enamorado de todas las servidoras de todas las mujeres es un enamorado de una servidora de toda mujer". Finalmente:

$$l^{sw} \prec l^s w \qquad \text{(C.P. ibid.)}$$

"un enamorado de toda servidora de una mujer es, con relación a una mujer, un enamorado de todas sus servidoras"[25].

A partir del principio general:

$$l[\Pi x f(x)] \prec \Pi x[lf(x)]$$

que no demuestra sino que simplemente ilustra para la multiplicación lógica[26], PEIRCE deriva

$$l[\Pi w(sw)] \prec \Pi w[(ls)\, w]$$

o

$$ls^w \prec (ls)^w \qquad \text{(C.P. ibid.)}$$

"un enamorado de una servidora de toda mujer es, en relación a toda mujer, un enamorado-de-una-de-sus-servidoras".

De esta forma obtenemos la secuencia:

$$l^{sw} \prec l^s w \prec l^{s^w} \prec ls^w \prec (ls)^w \prec lsw \qquad \text{(C.P. ibid.)}$$

También tenemos las fórmulas generales para la inclusión:

$$\text{si } l \prec s \quad \text{entonces} \quad l^w \prec s^w \qquad \text{(C.P. 3.91)}$$

$$\text{y si } s \prec w \quad \text{entonces} \quad l^w \prec l^s \qquad \text{(C.P. ibid.)}$$

PEIRCE añade en C.P. 3.77 las siguientes fórmulas:

$$(s^l)^w = s^{(lw)} \qquad \text{(Cf. igualmente C.P. 3.56)}$$

$$l^{s+w} = l^s \times l^w \qquad \text{(Cf. igualmente C.P. 3.56)}$$

---

[25] A partir de $l^s w$ PEIRCE forma la inclusión $l^s w \prec l^{s^w}$ (Cf. C.P. 3.97).

[26] PEIRCE representa el principio bajo la forma $l\Pi' \prec \Pi' l$ (Cf. C.P. 3.97).

En el mismo artículo PEIRCE ofrece una interesante ley derivada de la "fórmula newtoniana" de LAMBERT[27]:

$$(l + s)^w = l^w + \Sigma q(l^{w-q} \times s^q) + s^w \qquad \text{(C.P. 3.56)}$$

"El que es un enamorado o un servidor de toda mujer es o enamorado de toda mujer, o, para alguna parte q de la clase mujer, está enamorado de toda mujer salvo de los miembros de q y es servidor de todo miembro de q, o, finalmente, es servidor de toda mujer" PEIRCE da igualmente esta ley bajo una forma que se acerca todavía más estrechamente al teorema del binomio:

$$(l + s)^w = l^w + [w] \,.\, l^{w-1} \times s^1 + \frac{[w] \,.\, ([w] - 1)}{2} \cdot l^{w-2} \times s^2 + \text{etc.}$$

(C.P. 3.77)

La ley correspondiente para el producto lógico es la siguiente:

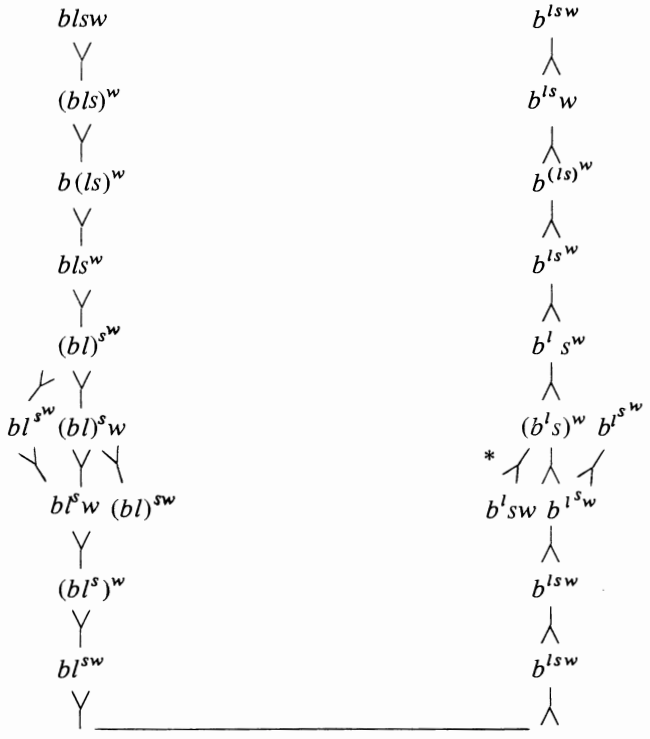
$$(l \times s)^w = l^w \times s^w \qquad \text{(C.P. 381)}$$

En 1880 PEIRCE ofrece dos leyes por las que se rigen las negaciones:

$$\overline{(l \times s)^w} = \overline{l^w} + \overline{s^w}$$
$$\overline{l^{s+w}} = \overline{l^s} + \overline{l^w} \qquad \text{(C.P. 3.249)}$$

En C.P. 3.98 PEIRCE introduce un cuarto término *b* y recapitula, en el siguiente diagrama, las relaciones de inclusión obtenidas, al mismo tiempo que invita al lector a formular estas últimas, de manera precisa, en el lenguaje cotidiano, para percibir mejor las ventajas de su notación algebraica:

[27] Cf. J.N. LAMBERT, "Sechs Versuche einer zeichenkunst in der vernunftlehre", *Logische u. Philosophische Abhandlungen*, I (Berlín: 1782).



En el mismo artículo PEIRCE introduce, un poco más lejos, una operación distinta de involución, llamada por entonces *"backward involution"* (C.P. 3.113) y que a partir de 1880 llamará *"regressive Involution"* (C.P. 3.242). Esta operación representada por DE MORGAN[28] bajo la forma *L, S* la simboliza PEIRCE por medio de ^{l}s y puede leerse: *"un enamorado de nada salvo de las servidoras"*[29]. De la misma manera que teníamos

$$l^s = 1 - (1 - l)\, s$$

tendremos:

$$^{l}s = 1 - l\,(1 - s)\ . \qquad \text{(C.P. 3.112)}$$

[28] Cf. "On The Syllogism IV and on the Logic of Relations", *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* (1864), p. 342.

[29] PEIRCE llama a los "relativos" de este tipo "relativos" infinitesimales a causa de una analogía matemática que presenta en C.P. 3.111 ss.

Como PEIRCE subraya, *"todas las leyes de esta operación, son las mismas que las de la involución ordinaria y la única excepción forma parte de las que se dice que confirman la regla. Esta excepción es la siguiente: mientras que en la involución ordinaria tenemos* $(l^s)^w = l^{(sw)}$ *en la involución regresiva tenemos* ${}^l({}^sw) = {}^{(ls)}w$" (C.P. 3.113). Las leyes enunciadas por PEIRCE son las siguientes:

$$ {}^{l+s}w = {}^lw \times {}^sw \qquad \text{(C.P. 3.114)} $$

$$ {}^l(f \times u) = {}^lf \times {}^lu \qquad \text{(C.P. ibid.)} $$

$$ {}^l(u + f) = {}^lu + \Sigma_p^{l-p}\, u \times {}^pf + {}^lf\,. \qquad \text{(C.P. ibid.)} $$

$$ \text{si} \quad s \prec w \text{ entonces } {}^ls \prec {}^lw \qquad \text{(C.P. 3.118)} $$

$$ \text{si} \quad l \prec s \text{ entonces } {}^sw \prec {}^lw \qquad \text{(C.P. ibid.)} $$

$$ {}^{ls}w \prec {}^{(ls)}w, \qquad \text{(C.P. ibid.)} $$

$$ l^s w \prec {}^{ls}w, \qquad \text{(C.P. ibid.)} $$

$$ {}^lsw \prec {}^l({}^sw) \qquad \text{(C.P. ibid.)} $$

Tenemos, además, las leyes que rigen la negación, dadas en 1880 bajo la forma:

$$ \overline{{}^l(s \times w)} = \overline{{}^ls} + \overline{{}^lw} $$

$$ \overline{{}^{l+s}w} = \overline{{}^lw} + \overline{{}^sw} \qquad \text{(C.P. 3.249)} $$

Los dos tipos de involución están relacionados por las leyes siguientes:

$$ {}^l({}^sw) = ({}^ls)^w \qquad \text{(C.P. 3.115)} $$

$$ {}^ls = (1 - l)^{(1-s)} \qquad \text{(C.P. 3.116)} $$

$$ {}^l\overline{s} = \overline{l}^s \qquad \text{(C.P. 3.243)} $$

$$ \overline{{}^ls} = l^{\overline{s}} \qquad \text{(C.P. ibid.)} $$

Pero en 1883 PEIRCE se aleja de la perspectiva morganiana, al abandonar las dos operaciones de involución y tiende a aproximarse al molde booleano. Como quiera que no conserva más que la conversa y las operaciones de suma y de multiplicación relativas, realiza esta vez el ideal, que se había propuesto desde 1870, de un cálculo de relativos *"que resulte de un ensanchamiento de las concepciones del cálculo lógico de BOOLE"*[30]. Vamos a presentar aquí los principales resultados del artículo de 1883 que, completado por medio de algunas páginas de la memoria de 1885, nos

[30] Título de la Memoria de 1870 (Cf. C.P. 3, p. 27).

ofrece la forma última del desarrollo peirciano del cálculo de los relativos. No indicaremos más que las leyes propias de los relativos[31].

a) Leyes concernientes a la conversa:

1.	$\breve{\breve{l}} = l$	(C.P. 3.330)
2.	$\bar{\breve{l}} = \breve{\bar{l}}$	(C.P. ibid.)
3.	$(l \prec b) = (\breve{l} \prec \breve{b})$	(C.P. ibid.)
4.	$\widetilde{l + b} = \breve{l} + \breve{b}$	(C.P. 3.337)
5.	$\widetilde{l \dagger b} = \breve{b} \dagger \breve{l}$	(C.P. ibid.)
6.	$\widetilde{l \times b} = \breve{l} \times \breve{b}$	(C.P. ibid.)
7.	$\breve{lb} = \breve{b}\breve{l}$	(C.P. ibid.)

b) Leyes concernientes a la suma y al producto relativos:

8.	Si $l \prec s$ entonces $lb \prec sb$	(C.P. 3.332)
9.	Si $l \prec s$ entonces $l \dagger b \prec s \dagger b$	(C.P. ibid.)
10.	Si $b \prec s$ entonces $lb \prec ls$	(C.P. ibid.)
11.	Si $b \prec s$ entonces $l \dagger b \prec l \dagger s$	(C.P. ibid.)
12.	$l(bs) = (lb)\, s$	(C.P. 3.334)
13.	$l \dagger (b \dagger s) = (l \dagger b) \dagger s$	(C.P. ibid.)
14.	$l(b \dagger s) \prec lb \dagger s$	(C.P. ibid.)
15.	$(l \dagger b)\, s \prec l \dagger bs$	(C.P. ibid.)
16.	$ls + bs \prec (l + b)\, s$	(C.P. ibid.)
17.	$(l \times b) \dagger s \prec (l \dagger s) \times (b \dagger s)$	(C.P. ibid.)
18.	$(l + b)\, s \prec ls + bs$	(C.P. ibid.)
19.	$(l \dagger s) \times (b \dagger s) \prec (l \times b) \dagger s$	(C.P. ibid.)

[31] Puesto que los relativos son también nombres de clases, están sometidos a las operaciones habituales del cálculo de BOOLE.

20. $\overline{l \dagger b} = \bar{l}\,\bar{b}$ (C.P. 3.336)

21. $\overline{lb} = \bar{l} \dagger \bar{b}$ (C.P. ibid.)

En C.P. 3.339 PEIRCE añade cuatro nuevos tipos de relativos: *"No hay más que un solo relativo que pueda emparejar cada objeto consigo mismo y con cualquier otro. Se trata de la suma de todas las parejas y se designa por medio de ∞. En el lenguaje corriente se traduce por "coexistente con". Su negación es 0. No hay más que un solo relativo que pueda emparejar cada objeto consigo mismo y con cualquier otro. Se trata de:*

$$(A : A) + (B : B) + (C : C) + etc.,$$

que es designado por 1 *y, en el lenguaje cotidiano, por "idéntico a". Su negación, designada por* n, *significa "distinto de" o "no" "*[32]. Se habrá reconocido sucesivamente la relación universal, la relación nula, así como las relaciones de identidad y de alteridad. Tenemos pues las siguientes fórmulas enunciadas en C.P. 3.340-341 (donde x y l son relativos):

22. $0 \prec x$ $\quad$ $x \prec \infty$

23. $x + 0 = x$ $\quad$ $x \times \infty = x$

24. $x + \infty = \infty$ $\quad$ $x \times 0 = 0$

25. $x \dagger \infty = \infty$ $\quad$ $x0 = 0$

26. $\infty \dagger x = \infty$ $\quad$ $0x = 0$

27. $x \dagger n = x$ $\quad$ $x1 = x$

28. $n \dagger x = x$ $\quad$ $1x = x$

29. $l + \bar{l} = \infty$ $\quad$ $l \times \bar{l} = 0$

30. $1 \prec l + \breve{\bar{l}}$ $\quad$ $l \times \breve{\bar{l}} = n$

31. $1 \prec l \dagger \breve{\bar{l}}$ $\quad$ $l\breve{\bar{l}} \prec n$

Se ve fácilmente la complejidad del nuevo cálculo que utiliza seis operaciones (tres absolutas y tres relativas) y términos que unas veces se interpretan como nom-

[32] En 1885 PEIRCE emplea a veces $\bar{1}$ en lugar de n (Cf. C.P. 3.403 A). SCHRÖDER representa ∞ y 0 por medio de 1 y de 0 y 1 y n por medio de 1′ y 0′. Critica el simbolismo de PEIRCE que, a su juicio, vela las bellas analogías entre los dos tipos de expresiones (Cf. *op. cit.*, III, p. 34). Merece notarse que en 1897 PEIRCE emplea ϒ para la relación universal y I y T para las relaciones de identidad y de alteridad (C.P. 3.496).

bres de clase y otras como nombres de relaciones. PEIRCE subraya el carácter multiforme de su nueva lógica: *"La lógica de los relativos es multiforme en alto grado. Se caracteriza por innumerables inferencias inmediatas y por numerosas conclusiones distintas a partir de los mismos conjuntos de premisas"* (C.P. 3.342). Es de notar también que los principios generales de eliminación y de resolución del cálculo de BOOLE no pueden emplearse aquí: *"... este álgebra no puede someterse a reglas estrictas e imperativas como las que caracterizan el cálculo booleano; y aquí no podremos dar sino una visión general de la manera de proceder"* (C.P. ibid.). PEIRCE no desarrolla prácticamente más que los procedimientos de eliminación. Así escribe en C.P. 3.342: *"La eliminación... en este álgebra depende... de fórmulas completamente análogas a las fórmulas:*

$$x + (-x) = 0 \qquad\qquad x \times \frac{1}{x} = 1$$

del álgebra aritmética. Estas fórmulas son las siguientes[33]*:*

$$l \times \bar{l} = 0 \qquad\qquad l\breve{\bar{l}} \prec n$$

$$l + \bar{l} = \infty \qquad\qquad 1 \prec l \dagger \breve{\bar{l}}$$

Por ejemplo para elimiar "s" de las dos proposiciones:

$$1 \prec l\,\bar{s} \qquad\qquad 1 \prec \breve{s}\,b$$

las multiplicamos relativamente de manera que se yuxtapongan las dos "s"; aplicamos a continuación la segunda de las fórmulas antes citadas. Así:

$$1 \prec l\,\bar{s}\,\breve{s}b \prec l\,n\,b$$

este ejemplo muestra la utilidad de las fórmulas asociativas en la yuxtaposición de letras. Otras fórmulas muy importantes a este efecto son:

$$(b \dagger l)\,s \prec b \dagger ls \qquad\qquad b(l \dagger s) \prec bl \dagger s$$

Y añade en C.P. 3.343: *"Cuando la letra por eliminar haya sido substituida por uno de los cuatro relativos –0, ∞, 1,* n– *podremos a menudo desembarazarnos del relativo de substitución gracias a una de las fórmulas siguientes:*

---

[33] Se ve con facilidad que las fórmulas de la izquierda utilizan el producto y la suma lógicas, mientras que las de la derecha se refieren a la multiplicación y a la adición relativas.

$$l + 0 = l \qquad\qquad l \times \infty = l$$

$$l \dagger n = n \dagger l = l \qquad\qquad l1 = 1l = l$$[34]"

Sin embargo PEIRCE señala que su cálculo de los relativos se convierte en algo *"más bien complicado"*[35] (C.P. 3.351). Por esta razón, al final del artículo de 1883, PEIRCE propone, en C.P. 3.355, una nueva formulación de las premisas en los problemas de lógica relativa. La nueva notación va a consistir en recoger los elementos introducidos al principio del artículo, en la escritura del *"relativo general"* (que se escribía $l = \Sigma_i \Sigma_j (l)_{ij} (I : J)$ como ya se ha visto): *"En estos casos (cuando intervienen las operaciones relativas y no relativas), de la misma manera que los que encierran relaciones poliádicas (que se dan entre tres objetos o más), es a menudo ventajoso recurrir a los coeficientes numéricos mencionados en 329"* (C.P. 3.351). Esta formulación iba a orientar a PEIRCE hacia una nueva vía de investigación que iba a revelarse particularmente fecunda y que vamos a examinar ahora detalladamente.

1.3. "El álgebra general de la lógica": Hacia una lógica de la cuantificación

PEIRCE se dio cuenta poco a poco de que el cálculo de los relativos, tal como lo había construido, resultaba, no solamente pesado de manejar, sino incapaz de abarcar el dominio total de la lógica relativa y de alcanzar una visión unitaria de las diversas ramas de la investigación lógica. En 1897, en un artículo publicado con ocasión de la aparición del tomo III de las *Vorlesungen* de SCHRÖDER, subraya lo lejos que está de conceder una atención exclusiva al álgebra de los relativos binarios: *"El Profesor SCHRÖDER concede, a mi juicio, un valor excesivo a este álgebra"* (C.P. 3.498)[36]. En un artículo escrito el año anterior reprocha a este álgebra tener *"un grano de trigo por cada diez celemines de salvado"* (3.451)[37]. La crítica de PEIRCE parece principalmente inspirada por la toma de conciencia del carácter extrínseco de una adhesión demasiado servil al formalismo matemático, toma de conciencia que había inspirado, según se recordará, las primeras modificaciones que había aportado al cálculo de BOOLE. Bien es verdad que en los primeros trabajos dedicados a la lógica de los *"relativos"* PEIRCE parecía haber sucumbido a la tentación del matematicismo: basta pensar en cierta página del artículo de 1870 donde PEIRCE, en un cálculo muy complejo y lleno de analogías matemáticas, establece las correspondencias lógicas de los logaritmos, de los infinitesimales, de las diferen-

---

[34] PEIRCE ofrece en C.P. 3.345 ss. un buen número de ilustraciones de las reglas que acabamos de enunciar.

[35] La notación de las proposiciones existenciales por medio de la "relación" nula y de la "relación" universal ($\infty \prec 0$ que significa "alguna cosa existe": Cf. C.P. 3.347) introduce nuevas complicaciones en el cálculo (Cf. C.P. 3.348-49-50).

[36] Cf. "The Logic of Relatives", *The Monist*, VII (1897), pp. 161-217.

[37] PEIRCE escribe: "too many bushels of chaff per grain of weat" (Cf. "The Regenerated Logic", *The Monist*, VII (1896), pp. 19-40).

ciales, de los cuaternios, de $\sqrt{-1}$, de π, del teorema del binomio y de los teoremas de TAYLOR y MACLAURIN (Cf. C.P. 3.100 ss.). Pero, a partir de 1883, PEIRCE parece alejarse cada vez más del molde matemático: por lo menos éste es el sentido en que nosotros interpretamos el abandono de las operaciones relativas de involución y la búsqueda de un nuevo simbolismo menos próximo al simbolismo matemático.

Pero la crítica de PEIRCE parece igualmente inspirada por la conciencia de haber encontrado, para los relativos, *"un (álgebra) diferente... de un interés mucho mayor"* (C.P. 3.499), que *"no conlleva más que dos operaciones fácilmente manipulables"* y que es *"el aparato más cómodo para el estudio de los problemas lógicos difíciles"* (C.P. 3.502): se trata de lo que llamará *"el álgebra general de la lógica"* (C.P. 3.447 y C.P. 3, p. 316). Aparte de la reducción de las operaciones a las dos operaciones lógicas de suma y de multiplicación, la nueva álgebra presenta, si se la compara al primer cálculo de relativos, unas novedades importantes. En primer lugar, PEIRCE adjunta a sus signos relacionales índices que muestran, por una parte cuáles son los individuos relacionados y por otra en qué orden se establece la relación. Como escribe PEIRCE: *"Cada relativo elemental es representado por una letra sobre la línea de escritura, provista de índices inferiores para designar las haecceidades que rellenan los lugares en blanco"* (C.P. 3.500). El término *"índice"* debe ser tomado aquí en el sentido técnico preciso que habíamos indicado en el capítulo precedente (Cf. n. 85). Tal como lo escribe PEIRCE: *"El mundo real no podría distinguirse del mundo imaginario gracias a descripción alguna. De ahí la necesidad de pronombres y de índices: cuanto más complejo es el sujeto más aparece la necesidad de ello"* (C.P. 3.363). PEIRCE lo presenta en 1885 con estas palabras: *"el índice no afirma nada; dice solamente " ¡he aquí!" Es como si retuviera la vista y la hiciera volver imperiosamente hacia un objeto particular: aquí se acaba su papel"* (C.P. 3.361). Hay que notar que un índice tal es muy diferente del que aparece en "On a New List of Categories"[38]. En esta última nota el índice *"It"* aparece como un concepto *"del presente en general"* (C.P. 1.547) y no se refiere directamente a un individuo. La filosofía peirciana de 1870 está por cierto caracterizada por la falta de un verdadero principio de individuación: *"No sólo el individuo absoluto no puede concebirse por la percepción o el pensamiento, sino que no puede, hablando con propiedad, existir. Pues lo que dura, aunque sólo sea un instante por breve que éste sea, es susceptible de división lógica pues, durante esta fracción de tiempo, sufrirá un cambio en sus relaciones. Pero lo que no existe, aunque sólo sea un instante por breve que éste sea, no existe en absoluto. Por consiguiente, todo lo que nosotros percibimos, todo lo que nosotros pensamos, o todo lo que existe, es general. En esta medida es verdadera la doctrina del realismo escolástico. Pero todo lo que existe está infinitamente determinado y lo infinitamente determinado es lo absolutamente individual. Esto puede parecer paradójico, pero la contradicción se elimina con facilidad. Lo que existe es el objeto de un pensamiento verdadero. Este pensa-*

[38] *Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences*, 7 (1867), pp. 287-268.

miento puede determinarse más que cualquier otra forma de pensamiento; y por tanto no está nunca tan determinado como para no ser susceptible de una determinación ulterior" (C.P. 3.93, nota 1). Bien es verdad que la lógica de 1870 contiene variables individuales, pero los valores de estas variables no son verdaderamente singulares. Las variables aparecen entonces como entidades susceptibles de recibir una determinación mayor y que, por comodidad se tratan como singulares (C.P. 3.93-94). Por tanto, incluso los nombres propios, no nos remiten a verdaderos individuos pues, como lo indica el caso de *"Felipe borracho"* y *"Felipe sobrio"* (C.P. 3.93) estos individuos son divisibles (Cf. C.P. 3.93 y 2.415). La utilización del término *"índice"* para significar un signo que se refiere, no a un concepto, sino a un individuo no aparece antes de 1885[39] y PEIRCE reconoce aquí que *"la introducción de los índices en el álgebra de la lógica es el mérito principal de la obra de M. MITCHELL"* (C.P. 3.363), que PEIRCE, a este respecto, contrapone al sistema de ROYCE: *"(ROYCE) piensa, al parecer, que el sujeto real de una proposición puede ser designado por un término general de la proposición; es decir, que el sujeto del que precisamente se habla puede distinguirse de otros objetos por el hecho de que se da de él una definición general. KANT ya ha mostrado... que no es así; y estudios recientes de lógical formal* (PEIRCE cita a este respecto: MITCHELL *en* Logical Studies by Members of the Johns Hopkins University y PEIRCE *en* The American Journal of Mathematics, *Vol VII*) *han resaltado más claramente el hecho. Pensamos..., que además de los términos generales, otros dos tipos de signos son absolutamente indispensables en todos los razonamientos. Uno de estos tipos es el índice"* (C.P. 8.41).

En la notación peirciana del *"relativo"* por medio de una letra seguida de un índice se conoce la noción de *"rhema"*, término que PEIRCE parece introducir por primera vez en 1892: *"Si marcamos sobre un diagrama dos puntos, o más, que después se identificarán con objetos naturales, de manera que se dé su sentido al diagrama; o también si en una proposición escrita cualquiera colocamos guiones en lugar de dos (o más) demostrativos o pro-demostrativos, la representación, calificada de incompleta, que resulta de ello puede llamarse* Rhema relativo. *Este último no difiere de un término relativo más que en el hecho de que conserva la "cópula", o, dicho de otra forma, el signo de afirmación. Si se suprime un solo demostrativo o pro-demostrativo, el resultado es un* rhema no relativo. *Por ejemplo "____ compra ____ a ____ por el precio de ____" es un rhema relativo... Por el contrario, "____ es mortal" es un rhema no relativo"* (C.P. 3.420). PEIRCE parece haberse inspirado en el modelo químico: *"Un rhema es una cosa muy análoga a un átomo o a un radical químico de enlaces no saturados"* (C.P. 3.421). Y asimila los rhemas no relativos y relativos a radicales monovalentes y multivalentes (Cf. C.P. ibid.). El número de enlaces define pues la aridad (*"adinity"*: C.P. 3.465) de la expresión: *"Si el número de lugares en blanco que contiene es nulo, se la puede, no obstante, considerar co-*

[39] El término de haecceidad citado más arriba no parece presentarse en la obra de PEIRCE antes de 1890 (en la nota: "A guess at the riddle", Cf. C.P. 1.405).

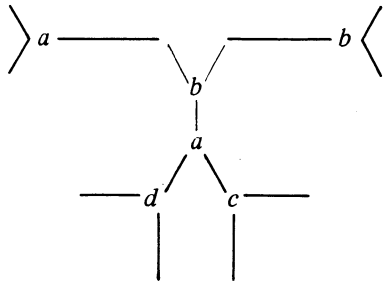
mo un rhema y bajo este aspecto la designo por medio del término medad[40]... *Si el número de lugares en blanco es más de uno, le llamo* Rhema relativo. *Si el número de lugares en blanco es de dos le llamo Rhema* Diada *o* relativo diádico. *Si el número de lugares en blanco es más de dos, le llamo* Políada *o* Relativo poliádico, etc. *Una* relación *es una substancia cuyo ser o identidad consisten precisamente en lo siguiente: su ser consiste en la posibilidad de un hecho que podría afirmarse de manera precisa rellenando, por medio de nombres propios, los lugares en blanco de un rhema relativo correspondiente; Su identidad consiste en el hecho de que es posible en todos los casos expresarlo de esta manera por medio del mismo rhema relativo"* (C.P. 4.354; Cf. igualmente 3.636). Descrito de esta manera, el rhema peirciano aparece como una anticipación de la noción moderna de predicado: *"En el enunciado de una relación, las designaciones de los correlatos deberían ser* consideradas *como otros tantos sujetos lógicos y el relativo mismo como el predicado. El conjunto completo de los sujetos lógicos puede igualmente ser considerado como un sujeto colectivo cuyo predicado es el enunciado de la relación"* (C.P. 3.467). Los primeros esbozos de formulación bajo la forma de variables predicativas seguidas de argumentos se encuentran, al parecer, al final del artículo de 1880 (Cf. C.P. 3.247), y luego en un artículo de 1882 (Cf. C.P. 3.309). Bien es verdad que las expresiones del tipo $(l)_{ij}$ aparece por entonces, según ya hemos visto, como una especie de coeficientes numéricos (Cf. C.P. 3.329), utilizados en las fórmulas del tipo $l = \Sigma_i \Sigma_j (l)_{ij} (I : J)$. Pero estos coeficientes tienen a veces el papel de verdaderos predicados, en el sentido moderno del término, y PEIRCE no duda en utilizarlos solos, por ejemplo, cuando quiere definir la noción de relación conversa: *"La conversa puede representarse como una línea curva sobre el signo del relativo. Así* $\breve{l}$. *Se define por medio de la ecuación:* $(\breve{l})_{ij} = (l)_{ji}$" (C.P. 3.330).

Es interesante señalar que, para PEIRCE, los rhemas poliádicos, es decir los que poseen más de dos argumentos (Cf. 4.354), pueden todos ellos reducirse a rhemas triádicos. En efecto, tal como PEIRCE lo señala en 1890 refiriéndose a la relación tetrádica: *"Tomemos el hecho cuádruple de que A vende C a B por un precio D. Estamos en presencia de una composición de dos hechos. Primero, A efectúa con C una transacción que llamaremos E. Segundo, esta transacción E representa una venta a B*[41] *por un precio D. Cada uno de estos hechos es un hecho triple de su combinación constituye un hermoso ejemplo de auténtico hecho cuádruple"* (C.P. 1.363). La explicación de PEIRCE se apoya sobre el análisis de la forma lógica de las relaciones utilizadas: *"... Un término relativo triple... constituye... una forma vacía, con tres espacios dejados en blanco. Por consiguiente, podemos tomar dos de estos relativos triples y rellenar, en cada uno, un espacio en blanco por medio de la misma letra, X, que tiene solamente el valor de un pronombre o de un índice identificador: los dos tomados en conjunto forman entonces un todo que tiene cuatro espacios en blanco; y a partir de aquí podemos continuar de esta manera hasta cualquier núme-*

[40] "De μηδαμός, ningún y άδα, desinencia de acusativo de las palabras como μόνας, δνάς... etc." (C.P. 3.465).

[41] En el texto de los *Collected Papers* las letras *B* y *C* han sido invertidas por error.

ro más elevado" (C.P. Ibid.). Combinando tres rhemas triádicos se obtendrá un rhema pentádico, etc. En una nota de 1903[42] PEIRCE se sirve de una representación gráfica, ya utilizada en 1902 (Cf. C.P. 4.309) y que, por cierto, recogió ese mismo año (C.P. 4.445): *"Es interesante señalar que mientras que un gráfico de tres terminaciones no puede resultar de gráficos que tengan cada uno de ellos dos o una terminación, por el contrario bastarán combinaciones de gráficos que tengan cada uno tres terminaciones para construir gráficos que conlleven un número superior de terminaciones:*



Y el análisis mostrará que cada relación, sea tetrádica, pentádica o que conlleve un número más elevado de correlatos, se reduce a un compuesto de relaciones triádicas" (C.P. 1.347). Los relativos de grado superior a 3 se expresarán pues bajo la forma de productos relativos de relativos triádicos. Así, "*____ da ____ a alguno que quita ____ a ____*" se presenta como el producto relativo de los relativos triádicos "*____ da ____ a ____*" y "*____ quita ____ a ____*" (C.P. 3.421). Por el contrario los relativos triádicos no pueden analizarse en relativos de grado inferior: *"... no podemos esquematizar el hecho de que A ofrece C a B por una suma cualquiera de relaciones binarias entre A y B, B y C, y C y A. A puede enriquecer a B, B puede recibir a C y A puede desprenderse de C, sin que por ello A dé necesariamente C a B. Para este hecho haría falta que estas tres relaciones binarias, no solamente coexistieran, sino que se amalgamasen para no constituir más que un solo hecho. Así vemos que una tríada no puede analizarse en díadas* (C.P. 1.363). En lo que PEIRCE llama una *"auténtica"* (C.P. 3.363) relación triádica, la relación existente entre dos elementos cualesquiera no existiría sin el tercero. Ello se ve claramente en el análisis peirciano de la relación que fundamenta todo signo: la relación entre el signo y el objeto se hace posible por un tercer elemento que es el *"interpretante"*; ya que la relación entre el interpretante y el objeto se realiza gracias a un signo que introduce su *"interpretante"* en tal relación, y ya que la relación entre el signo y el *"interpretante"* no existe más que a través del objeto que es el valor común (Cf. C.P. 1.480 y 6.32). La tríada peirciana se representa siempre por medio de signo [43] como se

[42] Extraída de las "Lowell Lectures" de 1903, III, Vol. I (3.er esbozo).

[43] Cuya fecundidad PEIRCE señala con humor representándola como "un emblema de fer-

ha visto más arriba. PEIRCE utiliza aquí el signo de la implicación sin duda para indicar que cada correlato implica la relación entre los otros correlatos, de tal manera que la ausencia de un correlato destruiría la relación.

La relación diádica aparece igualmente como irreductible. Si volvemos a tomar el ejemplo gráfico utilizado más arriba, se ve que la combinación de dos relaciones diádicas produce siempre dos terminaciones libres, y por tanto una relación final diádica[44]:

$$\_\_\_\_a\_\_\_\_b\_\_\_\_$$

Existen pues para PEIRCE tres tipos irreductibles de rhemas (Cf. C.P. 3.421)[45]. Se adivina la importancia de una comprobación semejante en el campo de una matemática *"ternaria"*, (Cf. C.P. 4.307 ss.) y sobre todo de una metafísica que anda a la búsqueda de tres categorías fundamentales de la realidad (Cf. C.P. 3.422). En el plano estrictamente lógico puede en primer lugar verse que PEIRCE parece desconocer el hecho de que los relativos tetrádicos y de grado superior, aún cuando puedan expresarse bajo la forma de productos relativos de relativos triádicos, no se convierten por ello en relativos triádicos. El producto relativo de dos relativos triádicos no es un relativo triádico, sino una cosa nueva, a saber, un relativo tetrádico. Por otra parte se ve que PEIRCE rechaza la idea moderna de que una relación triádica puede ser reducida a una serie de relaciones diádicas, es decir que (utilizando la notación de QUINE)[46]:

$$R(xyz) =_{df} R(<< x, y; z)$$

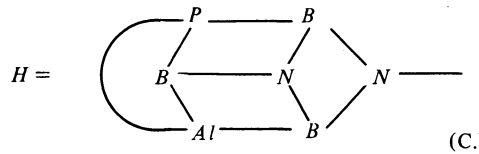
donde $y ; z =_{df} (< < y \cup < (< y \cup < z))$. La lógica moderna justificaría por el contrario el carácter fundamental de una relación diádica: toda relación diádica

---

tilidad en comparación al cual el falo sagrado de la religión primitiva es en verdad un pobre palitroque" (C.P. 4.310).

[44] "Una carretera que tan sólo posea tres ramificaciones puede tener un número cualquiera de finales, pero por muchas carreteras rectas que se pongan en el extremo de la otra, nunca darán lugar a más de dos finales" (C.P. 1.363).

[45] Aunque algunas observaciones parecen evocar la idea de una derivación del universo a partir de la tríada: "La tríada es tan fértil en formas que con facilidad puede concebirse que toda la variedad y la multiplicidad del universo tienen en ella su origen" (C.P. 4.310). Podría también compararse este texto con ciertas representaciones gráficas que muestran, tomando el ejemplo de la química, que un "átomo monádico" como *H* está compuesto de siete tríadas:



(C.P. 4.309).

[46] W.V. QUINE, *Mathematical Logic* (New York: 1962), pp. 198 y 201.

puede ser construida como una clase de parejas ordenadas y, en virtud de que las parejas se definen como uniones de clases unitarias[47], puede observarse que se pone una relación de pertenencia entre elementos y clase y, por tanto, que una relación diádica debe ser considerada como primitiva. Como pronto se verá, PEIRCE hubiera podido enunciar tal justificación de su teoría.

Si hasta aquí hemos asimilado el rhema peirciano a la noción moderna de predicado, ahora quisiéramos desarrollar esta idea por una segunda razón. El rhema nos introduce en efecto en una verdadera lógica de la cuantificación, de la cual PEIRCE, casi al mismo tiempo que FREGE[48], pero con independencia de él, había descubierto las líneas maestras. Los signos que PEIRCE interpretó en 1885 como cuantificadores parecen que le fueron sugeridos al principio por los signos matemáticos que indican la suma y el producto. Se ha visto que desde 1867 (Cf. C.P. 3.21) PEIRCE utilizaba el signo Σ para designar, no una suma aritmética, sino una suma lógica. Igualmente en 1870 (Cf. C.P. 3.97) PEIRCE utilizaba el signo Π como símbolo del producto lógico[49]. Se vuelve a encontrar el empleo de la Π y de la Σ en todos los primeros artículos. Una modificación importante de la noción aparece sin embargo hacia 1880, fecha a partir de la cual las Π y las Σ son aplicadas directamente a *"coeficientes"* del tipo L_i, $(l)_{ij}$ (Cf. C.P. 3.247, 3.310). Pero el texto más explícito data de 1883: *"Una proposición cualquiera equivale a decir que un compuesto de adiciones y de productos de coeficientes numéricos es más grande que 0. Así:*

$$\Sigma_i \Sigma_j l_{ij} > 0^{50}$$

significa que alguna cosa está enamorada de alguna cosa; y

$$\Pi_i \Sigma_j l_{ij} > 0$$

significa que todo está enamorado de alguna cosa. Sin embargo, omitiremos naturalmente, en la escritura de las desigualdades, el signo > 0 *con el que todas terminan. Y las dos proposiciones citadas aparecerán bajo la forma*

$$\Sigma_i \Sigma_j l_{ij} \quad \text{y} \quad \Pi_i \Sigma_j l_{ij} \qquad \text{(C.P. 3.351)"}$$

Al suprimir el signo > 0 PEIRCE anticipaba aquí la formulación moderna de las proposiciones cuantificadas. Sin embargo, es importante notar que en 1883, en el espíritu de PEIRCE, las expresiones así construidas representan esquemas que se aplican a los números: los símbolos Π y Σ se aplica a expresiones $(l)_{ij}$, presentadas

[47] W.V. QUINE, *op. cit.*, pp. 198 ss.

[48] Cf. FREGE, *Begriffschrift, eine der aritmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens* (Halle: 1879).

[49] En este artículo PEIRCE utilizaba Σ y Π con un acento para indicar la suma y la multiplicación lógicas.

[50] En lo sucesivo PEIRCE a menudo pone *"1"* entre paréntesis (Cf. por ejemplo el parágrafo siguiente).

la mayor parte del tiempo como coeficientes numéricos, para formar cifras y las proposiciones se forman a partir de estos últimos añadiendo –a veces tácitamente– el signo > 0.

Dos años más tarde PEIRCE abandona, sin embargo, esta perspectiva numérica e introduce, de una nueva forma, sus cuantificadores. Al presentar su teoría como una simple renovación del método de MITCHELL, su alumno, escribe: *"Abordamos ahora la distinción entre algo y todo, distinción que es la réplica exacta de la que existe entre la verdad y la falsedad, es decir, que es de orden descriptivo.*

Todos los intentos encaminados a introducir esta distinción en el álgebra de BOOLE han abocado a fracasos completos o casi completos, hasta el día en que M. MITCHELL ha enseñado el camino a seguir. Su método, de hecho, consiste en dividir la expresión completa de la proposición en dos partes: una expresión puramente booleana que se refiere a un solo individuo y una parte cuantificante que precisa de qué individuo se trata. De esta manera, si K quiere decir "es rey" y h "es feliz", la parte booleana

$$(\bar{K} + h)$$

quiere decir que el individuo en cuestión, o bien no es rey, o bien es feliz. Ahora bien, si aplicamos la cuantificación, podremos escribir:

$$\textit{Para todo } (\bar{K} + h)$$

para significar que esto es verdadero de cualquier individuo del universo (limitado), donde

$$\textit{para algún } (\bar{K} + h)$$

puede significar que existe un individuo que, o bien no es rey, o bien es feliz" (C.P. 3.393). Con el deseo de hacer que su notación fuese todo lo *"icónica"* posible PEIRCE vuelve a tomar la *"Σ, que sugiere una suma, para* alguno *y la* Π, *que sugiere un producto, para* todo. *De esta forma* $\Sigma_i x_i$ *significa que x es verdadero de un cierto individuo entre los individuos i en que*

$$\Sigma_i x_i = x_i + x_j + x_k + etc.^{51}$$

---

[51] En rigor sería necesario escribir

$$\Sigma_i x_i = x_j + x_k + \text{etc.}$$

ya que *i* no puede ser a la vez variable y constante. El editor de los *Collected Papers* propone que esta fórmula y la siguiente sean llamadas 7.º y 8.º iconos (Cf. C.P. 3, p. 228, nota). Efectivamente, PEIRCE, en su artículo salta, como veremos en el próximo capítulo, directamente del 6.º icono (Cf. C.P. 3.392) al 9.º icono (Cf. C.P. 3.399).

De manera semejante, $\Pi_i\, x_i$ *significa que x es verdadero de todos aquellos individuos en que*

$$\Pi_i\, x_i = x_i\, x_j\, x_k\,, \textit{ etc.}$$

Si x es una relación simple, $\Pi_i\, \Pi_j\, x_{ij}$ *significa que todo i está en esta relación respecto a todo j,* $\Sigma_i\, \Pi_i\, x_{ij}$ *que un cierto i está en esta relación respecto de todo j,* $\Pi_j\, \Sigma_i\, x_{ij}$ *que para todo j tal o tal i está en esta relación para con j,* $\Sigma_i\, \Sigma_j\, x_{ij}$ *que un cierto i está en esta relación respecto de algún j"* (C.P. Ibid.).

Este importante texto parece requerir dos observaciones. En primer lugar, habíamos visto que, en su presentación matricial, PEIRCE parecía apuntar a un conjunto infinito. Esta es la razón por la cual añade que las Σ y Π no pueden asimilarse totalmente a una suma y a un producto: *"Conviene señalar que* $\Sigma_i\, x_i$ *y* $\Pi_i\, x_i$ *son solamente semejantes a una suma y a un producto; su naturaleza no es estrictamente del mismo orden, pues los individuos del universo pueden ser no numerables"* (C.P. Ibid.). Por otra parte, al utilizar cuantificadores que se aplican a individuos, PEIRCE muestra claramente que se sitúa en el marco de un verdadero cálculo de predicados, pero los demás signos no están exentos de ambigüedad en la medida en que a veces sugieren un lenguaje de clases[52]. De ahí que, en este texto y en los que siguen, será siempre necesario interpretar los signos =, +, x respectivamente como equivalencia, disyunción y conjunción.

Tal parece haber sido la interesante evolución de la teoría peirciana de la cuantificación a partir de las sumas y productos de la aritmética. Es curioso notar que, en el artículo de 1885 en que la cuantificación se desarrolla de manera completamente moderna, PEIRCE en algunos momentos sigue ligado a la antigua teoría de la cuantificación como si se adhiriera a un término aislado. Por ello emplea, como se ha visto, α para significar todo término considerado como cuantificado universalmente para todo contexto y, por ello, define entonces la negación de x como $x \prec \alpha$. PEIRCE tenía, sin embargo, todo lo necesario para una cuantificación correcta de la expresión puesto que hubiera podido escribirla:

$$(\Pi y)\,(x \prec y) \quad \text{o} \quad x \prec (\Pi y)\, y$$

No obstante las aplicaciones que hace PEIRCE de la teoría de la cuantificación testimonian el elevado grado de elaboración que había alcanzado la teoría en los últimos artículos[53]. En primer lugar es interesante observar que PEIRCE introduce

[52] Es evidente que si a cada fórmula del cálculo de predicados se le asocia una clase no escapamos de la paradoja de RUSSELL. Es interesante que gracias a ciertas restricciones, A.P. MORSE haya logrado construir una teoría consistente mezclando lenguaje lógico y lenguaje conjuntista: Cf. *A theory of Sets* (N.Y., London: 1965).

[53] Dejamos de lado la nota de 1913 (Cf. C.P. 3.571-608) donde PEIRCE elabora una clasificación un tanto delirante de las relaciones diádicas, utilizando un esquema de prefijos y compuestos de prefijos latinos, clasificación que aboca al establecimiento de cuatro sistemas de divisiones cuya sutileza y complejidad sólo pueden compararse con su inutilidad.

–aunque con una terminología y una notación diferentes de las adoptadas con posterioridad– el uso de la forma normal llamada prenexa: *"En este álgebra toda proposición se compone de dos partes, sus cuantificadores y su parte booleana. La parte booleana se compone de un cierto número de relativos unidos por una multiplicación y una adición no relativas... A la izquierda de la parte booleana se escriben los cuantificadores* (C.P. 3.500-01)[54]. PEIRCE emplea aquí el término *"Boolian"* por lo que desde los Principia Mathematica se llama la *"matriz"*, mientras que el *"prefijo"* es llamado por PEIRCE la *"parte cuantificante"* (C.P. 3.393). Desde 1885 PEIRCE expresaba sus proposiciones cuantificadas agrupando al principio de las fórmulas todos los cuantificadores (Cf. en particular C.P. 3.395 ss.). Más tarde, en 1897, señala que se deberían *"situar las* Σ *lo más a la izquierda posible y las* Π *lo más a la derecha posible"* (C.P. 3.505), con lo cual anticipaba de manera notoria la forma normal prenexa de SKOLEM.

En segundo lugar, si se interpretan a la luz del artículo de 1885 las ecuaciones numéricas de 1883:

$$(lb)_{ij} = \Sigma_x \{(l)_{ix} \times (b)_{xj}\}$$
$$(l \dagger b)_{ij} = \Pi_x \{(l)_{ix} + (b)_{xj}\} \qquad \text{(C.P. 3.333)}$$

se obtienen las definiciones modernas del producto y de la adición relativas.

Por otra parte, si bien no existe en PEIRCE una presentación axiomática de la teoría de la cuantificación, se encuentra no obstante en él un interesante esbozo de formulación deductiva desarrollada en el ámbito de lo que llama, como los lógicos de la época, la investigación de un método general de eliminación. Desde 1883 PEIRCE escribe: *"Cuando tenemos un cierto número de premisas expresadas de esta manera (por medio de cuantificadores) resulta fácil deducir de ellas la conclusión gracias a las reglas simples que siguen. Tenemos en primer lugar*

$$\Sigma_i \Pi_j \prec \Pi_j \Sigma_i$$

En segundo lugar tenemos las fórmulas:

$$\{\Pi_i \varphi(i)\}\{\Pi_j \psi(j)\} = \Pi_i \{\varphi(i) \cdot \psi(j)\}$$
$$\{\Pi_i \varphi(i)\}\{\Sigma_j \psi(j)\} \prec \Sigma_i \{\varphi(i) \cdot \psi(i)\}$$

En tercer lugar, puesto que los coeficiente numéricos no son más que el cero *o la*

[54] Cf. igualmente C.P. 3.447: "Mi álgebra general de la lógica... consiste en poner simplemente índices a las letras de una expresión del álgebra booleana, de manera que se constituya lo que yo llamo una parte booleana, y en poner como prefijos una serie de "cuantificadores", que son las letras II y Σ, cada una de las cuales posee un índice."

unidad, *puede aplicárseles el cálculo de BOOLE"* (C.P. 3.355). En 1885 PEIRCE recoge las dos "reglas" centrales bajo la forma: *"Para todo (x), Para todo (y) equivalente a para todo (xy). De dos proposiciones: Para todo (x), Algún (y) se puede deducir algún (xy)* (C.P. 3.393). Pero el artículo de 1885 presenta un interés especial ya que PEIRCE desarrolla en él un método general en siete puntos en que se encuentra una notable anticipación de los esquemas de deducción del cálculo moderno de predicados:

1) *"Primero las diferentes premisas... se escriben conjuntamente y todas las* Π *y* Σ *deben ser trasladadas a la izquierda"* (C.P. 3.396). PEIRCE utiliza aquí las leyes de distributividad de los cuantificadores, enunciadas de la manera siguiente:

$$\Pi_i x_i \cdot \Pi_j x_j = \Pi_i \Pi_j x_i x_j$$
$$\Sigma_i x_i \cdot \Pi_j x_j = \Sigma_i \Pi_j x_i x_j$$
$$\Sigma_i x_i \cdot \Sigma_j x_j = \Sigma_i \Sigma_j x_i x_j$$

La escritura de PEIRCE es ambigua. Utilizando la "x" de 1880 la primera debiera escribirse:

$$\Pi_i x_i \times \Pi_j x_j = \Pi_i \Pi_j (x_i \times x_j)^{55}$$

de la misma manera se traducirían todas las leyes que le siguen.

2) *"En segundo lugar, sin trastornar el orden de los índices de una premisa cualquiera, las* Π *y las* Σ *que pertenezcan a diferentes premisas pueden ser desplazadas unas por relación a las otras y, en la medida de lo posible, las* Σ *deberán ser trasladadas lo más a la izquierda posible de las* Π*"* (C.P. Ibid.). PEIRCE utiliza aquí las siguientes leyes de permutación de los cuantificadores:

$$\Pi_i \Pi_j x_{ij} = \Pi_j \Pi_i x_{ij}$$
$$\Sigma_i \Sigma_j x_{ij} = \Sigma_j \Sigma_i x_{ij}$$
$$\Sigma_i \Pi_j x_i y_j = \Pi_j \Sigma_i x_i y_j$$

PEIRCE señala que la última fórmula no se ajusta cuando i y j no están separadas.

---

[55] Lo cual traducido al lenguaje moderno de predicados (utilizando los cuantificadores $\forall$ y $\exists$) da como resultado:

$$((\forall x) P(x) \wedge (\forall y) P(y)) \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(P(x) \wedge P(y))$$

Se tiene sin embargo:

$$\Sigma_i \Pi_j x_{ij} \prec \Pi_j \Sigma_i x_{ij}$$ [56]

Tal como lo indica PEIRCE: *"Convendrá empezar por situar las Σ lo más a la izquierda posible, pues en un estado más avanzado de la operación podrán ser trasladados a la derecha pero no a la izquierda. Por ejemplo si los operadores de dos premisas son* $\Pi_i \Sigma_j \Pi_k$ *y* $\Sigma_x \Pi_y \Sigma_z$ *podemos reunirlos en uno u otro de estos dos órdenes*[57]*:*

$$\Sigma_x \Pi_y \Sigma_z \Pi_i \Sigma_j \Pi_k$$

$$\Sigma_x \Pi_i \Sigma_j \Pi_y \Sigma_z \Pi_k$$

y por este hecho obtendremos generalmente conclusiones diferentes. La habilidad para la elección de la disposición más apropiada jugará a menudo su papel" (C.P. Ibid.).

3) La tercera etapa atañe a la parte llamada *"booleana"* de la expresión en la cual van a poderse eliminar ciertas letras. Puede analizarse en dos partes:

3′: Se podrá sustituir la expresión

$$a_{ijk} \quad \bar{a}_{xyz}$$

por

$$n_{ix} + n_{jy} + n_{kz}$$

donde *n* representa la relación de alteridad[58]. PEIRCE utiliza aquí una fórmula general de eliminación que representa, en C.P. 3.403 A, bajo la forma:

$$a_{ijk} \text{ etc. } \bar{a}_{xyz} \text{ etc. } \prec \bar{1}_{ix} + \bar{1}_{jy} + \bar{1}_{kz} \text{ etc.}$$

y recíprocamente:

$$1_{ix}\ 1_{jy}\ 1_{kz} \prec a_{ijk} \text{ etc. } + \bar{a}_{xyz} \text{ etc.}$$

3″: PEIRCE escribe que la tercera etapa *"engloba una gran diversidad de procedimientos"* (C.P. 3.396). Entre estos últimos sería necesario situar, como PEIRCE señala un poco más adelante, los desarrollos de la parte booleana por medio de las fórmulas distributivas: *"A la rúbrica titulada tercera etapa pertenece el desarrollo, a*

---

[56] Y no con $\Pi_i \Sigma_j x_{ij}$ a la derecha como escribe PEIRCE (Cf. C.P. nota del editor, C.P., 3, p. 231).

[57] A condición naturalmente de que *i* y *j* se hallen en predicados separados.

[58] Es decir: $(i \neq x) + (j \neq y) + (k \neq z)$.

menudo necesario, de la parte booleana por medio de las fórmulas distributivas... Las fórmulas distributivas fundamentales son las siguientes:

$$x(y + z) = xy + xz$$

$$x + yz = (x + y)(x + z)$$

Las fórmulas generales de desarrollo que de ellas resultan son:

$$Fx = xF1 + \bar{x}\, F0$$

$$= (x + F0)(\bar{x} + F1)$$

Las fórmulas siguientes que son de aplicación continua se deducen de las precedentes:

$$a + b = a + \bar{a}\, b$$

$$xy + \bar{x}\bar{y} = (x + \bar{y})(\bar{x} + y)$$

$$(a + b)\, c \prec a + bc$$

$$(a + x)(b + y) \prec a + b + xy"$$ (C.P. 3.403 B)

4) PEIRCE nota en C.P. 3.396 que en los casos ordinarios podemos dispensarnos la tercera etapa. Lo mismo sucede para la etapa siguiente que *"... consiste en arreglárselas de manera que los índices remitan a los mismos conjuntos de objetos, si resulta útil hacerlo. Si la parte cuantificante, el cuantificador, contiene* Σ_x *y si quisiéramos sustituir x por un nuevo índice, i, que no figura todavía en el cuantificador, y de tal manera que cada x sea un i, es posible efectuar inmediatamente esta sustitución multiplicando simplemente por* x_i *cada letra de la parte booleana que tenga x por índice.*

De esta manera si tenemos "alguna mujer es un ángel" *escrito bajo la forma* $\Sigma_w\, a_w$ *podemos sustituir esta expresión por* $\Sigma_i\, (a_i\, w_i)$ C.P. 3.396[59]". Como subraya PEIRCE, *"en la mayoría de las ocasiones resultará útil sustituir el índice de un* Π *por un índice de mayor extensión; cosa que se hará añadiendo* $\bar{x}_i$ *a cada letra que tenga x por índice. Así, si tenemos* "todos los perros son animales" *y* "todos los animales son vertebrados" *expresado de la manera siguiente*

$$\Pi_d\, \alpha_d \qquad\qquad \Pi_a\, v_a$$

[59] Se ve aquí que a_w aparece como una clase de clase e i como un elemento de una clase de clase.

donde a y α significan por igual "animal", *resultará cómodo sustituir este último índice por i, que representa un objeto cualquiera, y escribir la proposición:*

$$\Pi_i(\overline{a}_i + v_i)'' \qquad \text{(C.P. ibid.)}$$

5) Las dos etapas siguientes conciernen de nuevo a la parte *"booleana"* de la fórmula. La quinta *"... consiste en multiplicar toda la parte booleana por su propia forma, una vez modificada por la sustitución del índice de todo* Π *por otro índice cualquiera situado a su derecha en el cuantificador. Así en lugar de*

$$\Sigma_i \Pi_j l_{ij}$$

podemos escribir:

$$\Sigma_i \Pi_j l_{ij} l_{ii}'' \qquad \text{(C.P. ibid.)}$$

Traducida al lenguaje moderno de predicados esta quinta regla, que permite introducir en la parte *"booleana"* ciertas fórmulas nuevas, podría escribirse como sigue:

$$(\exists x)(\forall y) P(xy) \vdash (\exists x)(\forall y)[P(x , y) \wedge P(x , x)]$$

lo cual realmente corresponde a un esquema válido. En efecto (utilizando los esquemas de GENTZEN):

$$\frac{(\exists x)(\forall y) P(x , y)}{(\forall y) P(a , y)}$$

$$P(a , y)$$

$$P(a , a)$$

$$P(a , y) \wedge P(a , a)$$

$$(\forall y)(P(a , y) \wedge P(a , a))$$

$$(\exists x)(\forall y)[P(x , y) \wedge P(x , x)]$$

6) Esta quinta etapa se combina en la práctica con las dos últimas etapas. La sexta consiste *"... primero, en añadir a una parte cualquiera, un término cualquiera elegido; segundo, en cercenar de una parte cualquier el factor que nos plazca; y tercero, en observar que*

$$x\overline{x} = f, \qquad x + \overline{x} = v,$$

de manera que

$$x\bar{x}y + z = z, \qquad (x + \bar{x} + y)\, z = z'' \qquad \text{(C.P. Ibid.)}^{60}$$

Esta etapa combinada con la precedente nos permite, dice PEIRCE, derivar

$$\Sigma_i\, l_{ii} \quad \text{de} \quad \Sigma_i\, \Pi_j\, l_{ij}$$

Para mostrarlo nos basta, tras la etapa precedente, con derivar

$$\Sigma_i\, l_{ii} \quad \text{de} \quad \Sigma_i\, \Pi_j\, l_{ij}\, l_{ii}$$

es decir, en lenguaje moderno de predicados, con mostrar que el esquema siguiente:

$$(\exists x)\,(\forall y)\,[P(x\,,\,y) \wedge P(x\,,\,x)] \vdash (\exists x)\,P(x\,,\,x)$$

es válido. El razonamiento puede presentarse así:

$$\underline{(\exists x)\,(\forall y)\,[P(x\,,\,y) \wedge P(x\,,\,x)]}$$

$$(\forall y)\,(P(a\,,\,y) \wedge P(a\,,\,a))$$

$$P(a\,,\,y) \wedge P(a\,,\,a)$$

$$P(a\,,\,a)$$

$$(\exists x)\,P(x\,,\,x)$$

Traducido al lenguaje moderno de predicados el enunciado peirciano de las dos primeras partes de la sexta regla corresponde, por una parte, a un esquema de introducción de la disyunción (6′), por otra parte, tal como acaba de mostrar la deducción precedente, a un esquema de eliminación de la conjunción (6″).

7) La última etapa consiste en desdeñar las Π y Σ cuyos índices no aparecen ya en la parte *"booleana"*.

PEIRCE ofrece en C.P. 3.397 dos ilustraciones de las diversas reglas que acabamos de enunciar. No daremos más que la primera que PEIRCE presenta de la manera siguiente:

"Eliminar b a partir de las premisas $\Sigma_i\, a_i\, b_i$ *y* $\Pi_j\, (\bar{b}_j + c_j)$. *Se escribe primero:*

$$\Sigma_i\, \Pi_j\, a_i\, b_i (\bar{b}_j + c_j)\ .$$

La distributividad da

$$\Sigma_i\, \Pi_j\, a_i (b_i\, \bar{b}_j + b_i\, c_j)\ .$$

---

[60] Estas tres partes de la 6.ª etapa se numerarán respectivamente por medio de 6′, 6″ y 6‴.

Pero siempre se tiene derecho a despreciar un factor o a añadir un término. *Se obtiene de esta manera*

$$\Sigma_i \Pi_j a_i (b_i \bar{b}_j + c_j) .$$

Por la tercera etapa se puede sustituir $b_i \bar{b}_j$ *por* n_{ij}. *En uno u otro caso se identifica j con i y se obtiene la conclusión:*

$$\Sigma_i a_i c_i''$$ (C.P. ibid.)

cosa que la presentación siguiente en lenguaje moderno haría más explícito:

$$(\exists x)(P(x) \wedge Q(x))$$

$$\underline{(\forall y)(\neg Q(y) \vee R(y))}$$

$$(\exists x)(\forall y)[P(x) \wedge Q(x) \wedge (\neg Q(y) \vee R(y))] \quad \text{por 1}$$

$$(\exists x)(\forall y)[P(x) \wedge ((Q(x) \wedge \neg Q(y)) \vee (Q(x) \wedge R(y)))] \quad \text{por } 3''$$

$$(\exists x)(\forall y)[P(x) \wedge ((Q(x) \wedge \neg Q(y)) \vee R(y))] \quad \text{por } 6''$$

$$(\exists x)(\forall y)[P(x) \wedge (\neg (x = y) \vee R(y))] \quad \text{por } 3'$$

$$(\exists x)[P(x) \wedge (\neg (x = x) \vee R(x))]$$
por identificación de y con x y por 7

$$(\exists x)[P(x) \wedge R(x)] \quad \text{por } 6'''$$

Este ejemplo de deducción nos muestra que desde 1885 PEIRCE alcanzó una notable maestría en la teoría de la cuantificación. Después de esta fecha no se encuentra ningún desarrollo interesante sobre el problema general de la eliminación, pues PEIRCE se contenta con volver a exponer en 1897 los principios esenciales del método de 1885 (Cf. C.P. 3.503-509).

2. LA FORMULACION GRAFICA

2.1. Los primeros gráficos relacionales

Desde 1870, como ya hemos señalado, PEIRCE era consciente del carácter innovador de su contribución a la lógica de las relaciones. En varias ocasiones subraya la importancia que debe concederse a tal lógica: ésta no debe considerarse, dice, *"una doctrina altamente especializada"*; no se trata por el contrario *"más que de una lógica formal llevada a su grado máximo de generalización"* (C.P. 3.473). Se comprende pues que PEIRCE no se haya limitado a una representación gráfica de la lógica

enunciativa. Además, como ya hemos señalado en el capítulo precedente, donde PEIRCE parece haber realizado sus primeros ensayos de diagramas geométricos es en el dominio de las relaciones.

El interés de PEIRCE por la representación gráfica de las relaciones parece coincidir con su traslado a la Universidad de Juan HOPKINS. Sabemos que PEIRCE fue nombrado en 1879 encargado de curso en esta universidad y que debía cumplir esta función durante 5 años[61]. Allí fue donde conoció a Jaime J. SYLVESTER, que por entonces era jefe del departamento de matemáticas. Ahora bien, éste último, junto a Guillermo K. CLIFFORD, y, al parecer inspirado por la aplicación Cayleyana de la teoría de los árboles a la química[62], había empezado a emplear diagramas químicos para la representación de invariantes algebraicos. PEIRCE, a raíz de esto, debía mostrar el lazo que existe entre sus gráficos de entidad y los diagramas químicos, al definir en 1896 el gráfico como *"lo que CLIFFORD llama diagrama y que está compuesto de "lugares" (spots) y de líneas, a imitación de los diagramas químicos que muestran la estructura de los compuestos"* (C.P. 3.468).

En una carta de PEIRCE a su alumno O.H. MITCHELL, fechada el 21 de diciembre de 1882[63], es donde pueden encontrarse los primeros ensayos hechos por PEIRCE para aplicar los diagramas geométricos a la lógica de los *"relativos"*. PEIRCE empieza su carta señalando que *"la notación lógica de los relativos puede, en cierta medida, simplificarse desplegando las fórmulas sobre dos dimensiones. Por ejemplo, supongamos que se escriba*

$$\left[\begin{matrix} b \\ l \end{matrix}\right]$$

para expresar la proposición según la cual alguna cosa es al mismo tiempo bienhechor y enamorado de alguna otra cosa, dicho de otra manera

$$\Sigma_x \, \Sigma_y \, b_{xy} \, l_{xy} > 0$$[64]".

---

[61] PEIRCE sin duda pensaba quedarse más tiempo pues, en una carta del 6 de junio de 1879 dirigida a GILMAN, ponía las condiciones siguientes para su aceptación del puesto: "Pediría en primer lugar la responsabilidad exclusiva de esta disciplina (la lógica) y que hubiera una firme intención de crear para ella más adelante una cátedra" (citado por FISCH & COPE, "PEIRCE at the JOHNS Hopkins University", *Studies in the Philosophy of C.S. PEIRCE* (Cambridge: 1952), p. 283).

[62] La teoría de los árboles aparecía en CAYLEY en 1857 (Cf. On the Partitions of a Close", *Collected Mathematical Papers*, IV, pp. 112-115). Su aplicación a la química data de 1874 (ibid., IX, pp. 202-204(y de 1875 (ibid., IX, pp. 427-460). La teoría algebraico-química de SYLVESTER aparece en un artículo de 1909 donde se refiere explícitamente a CAYLEY (Cf. J.J. SYLVESTER "On a Application of the New Atomic Theory to the graphical Representation of the Invariants and Covariants of Binary Quantics – with three Appendices", *The Collected Mathematical Papers of J.J. SYLVESTER* (Cambridge: 1909), III, pp. 172 ss.).

[63] Carta que se encuentra en la Houghton library, en la Universidad de Harvard.

[64] Carta de PEIRCE a O.H. MITCHELL, 21 de diciembre de 1882 (Scientific Correspon-

Aquí se ve que las líneas representan individuos y que al mismo tiempo una cuantificación implícita –aquí existencial– se opera por los simples trazos de enlace. PEIRCE da tiambién el ejemplo siguiente:

"algo está enamorado de sí mismo, es decir $\Sigma_x\, l_{xx} > 0$".

Si los trazos de enlace están tachados, es que se ha efectuado una cuantificación universal, tal como lo muestran las siguientes figuras interpretadas por PEIRCE:

"cada cosa está enamorada de sí misma

o: $\Pi_x\, l_{xx} > 0$"

"toda cosa está enamorada o es bienhechora de toda cosa

o: $\Pi_x\, \Pi_y\, (l_{xy} + b_{xy}) > 0$"

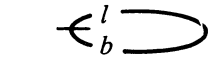
Si comparamos esta figura con la que se encuentra al principio de la carta, se puede observar que la agregación de barras transversales cambia no sólo la cuantificación sino también el operador de la *"matriz"*. PEIRCE no explica muy claramente este último cambio, aunque el pasaje siguiente de la misma carta trata de aportar alguna luz: *"El orden de unión de los enlaces semejantes no tiene importancia, el de los enlaces diferentes sí la tiene. Se pueden emplear líneas más cortas y más rectas para representar los enlaces puestos ulteriormente. Así:*

significará $\Sigma_y\, \Pi_x\, (l_{xy} + b_{xy}) > 0$ *es decir: existe algo del cual toda cosa está o enamorada o es bienhechora; mientras que*

---

dance). La fórmula $\Sigma_x\, \Sigma_y\, b_{xy}\, l_{xy} > 0$ se traduciría al lenguaje moderno del siguiente modo:

$$(\exists x)\,(\exists y)\,(B(xy) \wedge L(xy))$$



significará $\Pi_x \Sigma_y (l_{xy} b_{xy}) > 0$, *ó toda cosa está a la vez enamorada y es bienhechora de tal o tal cosa".*

A pesar de sus imperfecciones este ensayo nos parece interesante como anticipación de la versión final de los gráficos existenciales. Dos rasgos fundamentales vuelven a encontrarse en los gráficos existenciales: la línea que representa los individuos y la línea sin trazo transversal como índice de una cuantificación existencial. Parece difícil hablar de *"sistema"* a propósito de estas primeras tentativas. Por el contrario, en el artículo de 1897, al cual hemos hecho alusión en el capítulo precedente, se encuentra un sistema ya elaborado de diagramas geométricos de relaciones. Debe pues concluirse que entre 1882 y 1897 PEIRCE continuó sus investigaciones gráficas sobre las relaciones. Durante este período un matemático, del cual todavía no hemos hablado, parece haber ejercido una profunda influencia sobre PEIRCE: se trata de Alfredo Bray KEMPE, cuya memoria de 1886[65] leyó PEIRCE con mucho interés[66]. Por cierto que, al principio del siguiente año, PEIRCE envió a KEMPE una carta que obligó a este último a modificar ciertos enunciados de su memoria[67]. PEIRCE pudo observar que, en su Memoria, KEMPE había introducido una notación gráfica de *"lugares"* y de líneas, según el modelo químico como lo señaló PEIRCE más tarde (C.P. 3.468). Los *"lugares"* representaban en KEMPE las *"unidades"* es decir, las entidades a las cuales se refiere el razonamiento: *"Estas unidades se presentan bajo una gran diversidad de aspectos... como objetos materiales, intervalos o períodos de tiempo, procesos de pensamiento, puntos, líneas, proposiciones, relaciones, disposiciones, expresiones algebraicas, operadores, operaciones, etc. etc."*[68]. Las líneas unían algunos de los *"lugares"* entre sí[69] con el fin de dividir los *"lugares"* que representan las unidades consideradas en dos conjuntos: un conjunto cuyas unidades difieren unas de otras y un conjunto cuyas unidades son semejantes. Debe pues notarse que, en KEMPE, las líneas no se utilizan para representar *"toda relación... sino simplemente para distinguir ciertas parejas de objetos de otras parejas"*[70].

PEIRCE, no obstante, permanecio fiel a su notación de 1882 en lo que se refiere a la manera de representar los individuos por medio de líneas mejor que por medio de *"lugares"*. Esto es lo que muestra el extracto de 1892, presentado en la sección

---

[65] A.B. KEMPE, "Momoir on the Theory of Mathematical Form", *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, CLXXVII (1886), pp. 1-70.

[66] Cf. C.P. 5.505, 3.468, 3.601, 6.174.

[67] KEMPE hizo aparecer sus modificaciones en *The Royal Society's Proceedings*, XLII (1887), pp. 193-198. La fecha de la carta de PEIRCE a KEMPE –17 de enero de 1887– nos la proporciona el propio KEMPE en una nota aparecida en *The Monist*, VII (1897), p. 453.

[68] KEMPE. "Memoir on the Theory of Mathematical Form", sección 4.

[69] KEMPE, "A Correction and Explanation", *The Monist*, VII (1897), p. 457.

[70] KEMPE, *loc. cit.*, p. 458.

precedente[71], donde PEIRCE representa el *"rhema"* por medio de guiones *"en vez de dos (o más) demostrativos o pro-demostrativos"* (C.P. 3.420). En el mismo artículo PEIRCE muestra, claramente por cierto, que mantiene las distancias respecto de KEMPE: *"Después de haber examinado atentamente este análisis (el de KEMPE) soy de la opinión de que tiene un valor extraordinario. Me incita a modificar un poco mi posición, pero no a abandonarla"* (C.P. 3.423). Le reprocha en particular no haber tenido en cuenta el aspecto *"representativo"* de todo gráfico: *"La concepción del Sr. KEMPE se apoya en el hecho de que considera el diagrama puramente en sus relaciones intrínsecas, dejando completamente aparte la idea que representa, cualquiera que ésta sea; mi doctrina por el contrario intenta dilucidar la manera en que el diagrama puede estar unido a la naturaleza"* (C.P. ibid.). Es claro, en efecto, que, en la obra de KEMPE, las líneas no sirven más que para distinguir dos conjuntos de *"lugares"*, y no para representar las diversas relaciones reales que existen entre los individuos.

Las investigaciones peircianas, estimuladas por la lectura de KEMPE, abocan en 1897 al establecimiento de un primer sistema de gráficos relacionales, los gráficos de entidades. Ya se han visto, en el capítulo precedente, las posibles interpretaciones relacionales de estos gráficos. Por ello, aquí, sólo ofreceremos brevemente las representaciones propias de la lógica de predicados.

La línea sigue simbolizando al individuo: *"Todo enlace de un gráfico designa una haecceidad"* (C.P. 3.475). Pero PEIRCE ofrece aquí una interpretación nueva de la línea, basada en su posición dentro del gráfico. La regla de interpretación es la siguiente:

"1) *Elegir una letra del alfabeto para designar la haecceidad representada por cada enlace*[72].

2) *Empezar por decir: "Tomad los objetos que os plazca, a saber", y nombrar las letras que representan los enlaces no cercados: añadir a continuación: "Elegid luego convenientemente los objetos, a saber", y nombrar las letras que representan los enlaces cada una de las cuales está cercada una vez; añadir a continuación: "Tomad entonces los objetos que os plazca, a saber", y nombrar las letras que representan los enlaces cada una de las cuales está cercada dos veces. Proceder de esta manera hasta nombrar todas las letras que representan enlaces, de forma que ninguna letra sea nombrada mientras no hayan sido nombradas con anterioridad las que están cercadas menor número de veces; y cada haecceidad correspondiente a una letra cercada un número par de veces debe estar convenientemente elegida según la intención del que afirma la... proposición, mientras que cada haecceidad correspondiente a un enlace cercado un número par de veces debe ser considerada como el intérprete o adversario de la proposición lo desee"* (C.P. 3.479).

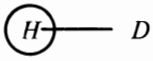
---

[71] Cf. Cap. 2, p. 86.

[72] PEIRCE añade en una nota: "En mi método de los gráficos los "lugares" representan los relativos, sus enlaces las haecceidades; mientras que el método del Sr. KEMPE, los "lugares" representan los objetos... en tanto que sus enlaces representan las relaciones (C.P. 3.479, n. 1).

Se ve pues que las líneas cuya parte menos cercada está rodeada de un número par (o nulo) de cortaduras, representan individuos cuantificados universalmente, mientras que las líneas cuya parte menos cercada está rodeada de un número impar de cortaduras simbolizan los individuos que reciben una cuantificación existencial. Algunos ejemplos simples ilustrarán esta regla.

Sea la figura siguiente en que *"H"* representa la propiedad "ser un hombre" y *"D"* la propiedad "ser mortal":



Si se recuerda que la cortadura representa una negación y que la yuxtaposición de *"gráficos de entidades"* representa una disyunción, se comprende entonces la interpretación siguiente propuesta por PEIRCE: *"Sea A una cosa cualquiera. Hay dos proposiciones 1 y 2, de las cuales una es verdadera. La proposición 1 es que A no es un hombre. La proposición 2 es que A es mortal. Más simplemente, cualquiera que sea A, o A no es un hombre o A es mortal"* (C.P. 3.480). Es decir, en lenguaje moderno:

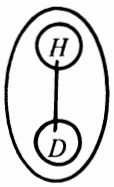
$$(\forall x)\,(\neg H(x) \vee D(x))$$

o también:

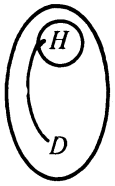
$$(\forall x)\,(H(x) \Rightarrow D(x))$$

Con facilidad se interpretarían también las figuras siguientes:

$(\forall x)\,(\neg H(x) \vee \neg D(x))$ o $(\forall x)\,(H(x) \Rightarrow \neg D(x))$



$\neg\,(\forall x)\,(\neg H(x) \vee \neg D(x))$ o $(\exists x)\,(H(x) \wedge D(x))$



$\neg (\forall x) (\neg H(x) \vee D(x))$ o $(\exists x) (H(x) \wedge \neg D(x))$

Pero PEIRCE, por las razones vistas en el capítulo precedente, abandonó rápidamente este sistema en favor de un nuevo sistema: el sistema Beta de los gráficos existenciales, que estudiaremos basándonos sobre todo en las "Lowell lectures" de 1903 y el "Syllabus" destinado a completarlas. Mientras que el sistema Alfa podía ser utilizado, según lo que ya se ha mostrado, como cálculo proposicional, el sistema Beta puede ser empleado como cálculo susceptible de aplicarse a la lógica de predicados de primer orden. Después de haber mostrado las convenciones iniciales estudiaremos, como ya lo hicimos para el sistema Alfa, las reglas de transformación. Al examinar, como colofón, las principales aplicaciones extraídas por PEIRCE de su nuevo sistema, trataremos de ver las propiedades esenciales de este último.

2.2. El sistema Beta de los gráficos existenciales

2.21. Los símbolos y convenciones de escritura

No daremos aquí más que las convenciones propias del sistema Beta, dando por entendido que este sistema presupone el sistema Alfa.

Una primera convención concierne a la representación de un individuo. Este último será representado por un *"punto grueso"* (C.P. 4.404), cuyo sentido se declara a continuación: *"puesto que la pizarra o la* hoja de aserción *representa el universo del discurso y puesto que este universo es un conjunto de individuos, parece razonable que todo punto*[73] *de la hoja muy fuertemente marcado represente un individuo único, aunque "•" signifique "alguna cosa existe" "* (Ms 455)[74]. En el caso de una colección de individuos PEIRCE empleará un trazo grueso[75]. Si se recuerda que la presentación de los *"rhemas"* de 1892 utilizaba *"guiones en lugar de... demostrativos"* (C.P. 3.420), se patentiza que la representación gráfica de individuos por medio de líneas viene a ser una constante en PEIRCE. Por otra parte, si el guión simboliza *"alguna cosa existe"*, se ve que Beta aparece como un sistema de cuantifi-

[73] El término "que" se repite una vez por error.

[74] Sin duda hay que ver en esta convención el origen del término "existencial" (Cf. también 4.421).

[75] A veces, no obstante, un trazo ordinario (C.P. 4.438 ss.), como lo haremos nosotros en nuestra presentación.

cación implícita donde todas las variables individuales no existen si no es cuantificadas. Más adelante se estudiarán las consecuencias de este hecho[76].

A las variables individuales se asocian los predicados propiamente dichos que estarán escritos en lenguaje cotidiano. PEIRCE llama *"spots"* a estas *"expresiones no analizadas en un rhema"* (C.P. 4.441); por ello traduciremos de ahora en adelante esta palabra por "lugar predicativo". Los lugares predicativos están unidos a las variables individuales por *"ganchos": "En la periferia de cada lugar predicativo se anexionará cierto lugar a cada espacio en blanco del rhema; y tal lugar será llamado* gancho *del lugar predicativo"* (C.P. 4.403). En la práctica estos ganchos no son visibles pues se encuentran siempre unidos a las variables individuales con las cuales se confunden. Se tendrán pues expresiones del tipo:

_____ es mortal

que significarán: "alguno es mortal".

Combinando dos gráficos del mismo tipo se tendrá, por ejemplo, un nuevo gráfico:

_____ es mortal
_____ es un hombre

que significará "alguno es mortal y alguno es un hombre" (para lo cual deberá recordarse que la yuxtaposición de los gráficos existenciales simboliza una conjunción). No podemos saber si se trata de la misma persona. Por el contrario la figura siguiente:

es mortal
es un hombre

expresará que "alguno es a la vez mortal y hombre". A la línea aquí utilizada PEIRCE la llama *"línea de identidad"* (C.P. 4.406) pues afirma *"la identidad de todos los*

---

[76] Se halla en la obra de QUINE un ensayo de representación de las variables por medio de líneas. Así para la fórmula:

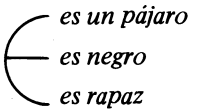
$$(x)\ (x \text{ es un hombre.} \supset \sim (y)\ (y \text{ es una ciudad.} \supset .\ x \text{ ha visto } y))$$

en la cual (x), $\supset$ y $\sim$ representan respectivamente el cuantificador universal, la implicación y la negación, QUINE propone la siguiente traducción por medio de líneas:

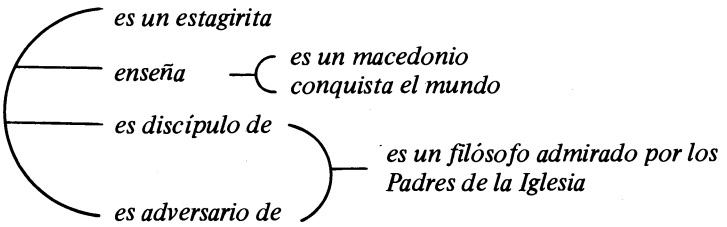
( ) (es un hombre. $\supset \sim$ ( ) (es una ciudad. $\supset$. ha visto))

Pero, a diferencia de las líneas de QUINE, las de PEIRCE no requieren cuantificador. Debe notarse también que QUINE considera poco prácticos sus diagramas; de ahí la necesidad, dice, de utilizar variables (Cf. QUINE, *Mathematical Logic* (New York and Evanston: 1962), p. 70).

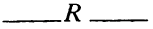
individuos designados por sus puntos" (Ms 455). La representación de la identidad de tres individuos utiliza lo que PEIRCE llama *"tridente de identidad"* (branching line) que expresa *"un rhema triádico que significa la identidad de tres individuos cuyas designaciones se representan como si rellenaran los lugares en blanco del rhema por coincidencia con las tres extremidades de la línea"* (C.P. 4.446). Así:



expresará que *"algún pájaro negro es rapaz"* (C.P. 4.445). De manera más general, PEIRCE llamará *"ligadura"* al conjunto *"compuesto de una línea de identidad cualquiera unida a todas las otras que están en relación con ella"* (C.P. 4.407). En Ms. 450, PEIRCE ofrece el ejemplo siguiente:



que significa: *"Existe un estagirita que enseña a un macedonio conquistador del mundo, y que es a la vez discípulo y adversario de un filósofo admirado por los Padres de la Iglesia"* (Cf. también C.P. 4.445). Se ve en este ejemplo que un lugar predicativo puede estar unido a diversas líneas de identidad: en C.P. 4.416, PEIRCE muestra que un lugar predicativo puede tener varios ganchos, a cada uno de los cuales puede atarse una línea de identidad. Beta ofrece pues un medio para representar predicados binarios cuantificados. PEIRCE ofrece en C.P. 1.346 el ejemplo siguiente:

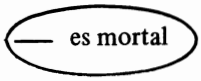


pero, como puede verse la significación permanece ambigua pues el orden de las variables libres no está precisado, ni tampoco el orden de los cuantificadores. Al estudiar más adelante el sistema Beta como sistema deductivo, veremos cómo pueden superarse estas dificultades.

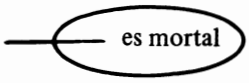
De aquí en adelante abandonaremos los términos "punto grueso", "ligadura", para no conservar más que el término de "línea de identidad" que simbolizaremos, para simplificar, por medio de "L.I.". Pero ¿qué pasa cuando una L.I. se encuentra en un gráfico con una cortadura? Se sabe que

—— es mortal

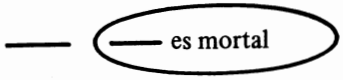
significa: "alguno es mortal". Por tanto:



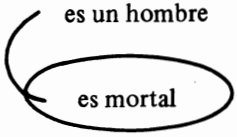
simbolizará: "es falso que alguno sea mortal", es decir: "Ningún individuo es mortal." Consideremos ahora un gráfico donde L.I. atraviese la cortadura[77]:



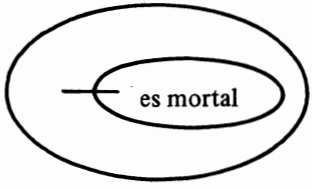
En un sentido puede decirse que hay dos L.I., una externa y otra interna. Si se tuviera una línea discontinua:



la figura obtenida se leería: "alguna cosa existe y es falso que alguna cosa sea mortal." Ahora bien, en la figura que precede a ésta, sus dos líneas tienen un punto en común. Designan pues el mismo individuo y la figura puede entonces interpretarse: "alguien existe y es falso que este mismo individuo es mortal", es decir "alguien no es mortal". El siguiente gráfico:

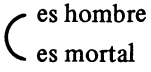


se leerá entonces: "algún hombre no es mortal." Por el contrario:

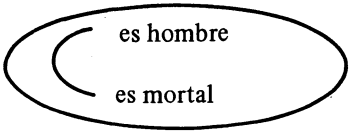


[77] Eventualidad que PEIRCE parece rechazar en el "Syllabus" en 1903 (Cf. C.P. 4.401 y 4.406) pero que considera en el mismo año en "Logical Tracts N-2" (Cf. C.P. 4.449 ss.).

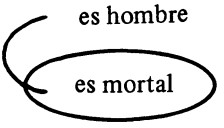
se interpretará: "Es falso que alguien no es mortal", es decir: "Todo individuo es mortal" (Cf. C.P. 4.440, 441, 458). Se ve pues que basta con invertir la regla de la cuantificación de los gráficos de entidad para obtener la de los gráficos existenciales: *"Toda línea de identidad cuya parte más exterior está cercada un número par de veces, remite a* alguna cosa, *y toda línea de identidad cuya parte más exterior está cercada un número impar de veces remite a* todo objeto... *Y la interpretación debe empezar por el exterior de todos los círculos y seguirse hacia el interior"* (C.P. 4.458). Las cuatro proposiciones categóricas de la lógica tradicional se traducirán por tanto de la manera siguiente (entendiendo las universales en un sentido no existencial, y por tanto no conforme al sentido aristotélico):



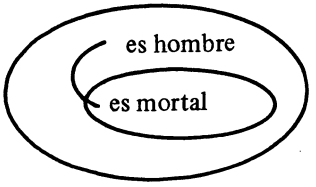
"Algún hombre es mortal"



"Ningún hombre es mortal"

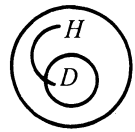
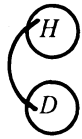
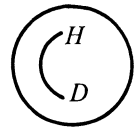
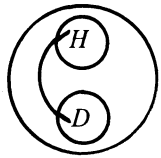
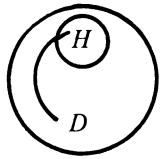


"Algún hombre no es mortal"



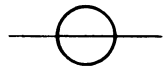
"Todo hombre es mortal"

Se podría entonces, como ya lo habíamos hecho en el capítulo precedente, comparar en un cuadro las diversas representaciones gráficas y algebraicas:

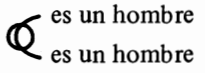
Algebra	Gráficos de entidades	Gráficos existenciales
$(\forall x)\,(H(x) \Rightarrow D(x))$		
$(\forall x)\,(H(x) \Rightarrow \neg D(x))$		
$(\exists x)\,(H(x) \wedge D(x))$		
$(\exists x)\,(H(x) \wedge \neg D(x))$		

Se observa pues que existe una cierta relación de dualidad entre los gráficos existenciales y los gráficos de entidades, puesto que la yuxtaposición, que se lee en los primeros como una conjunción, es interpretada como disyunción en el último caso.

Nos queda, para ser completo, considerar algunos casos particulares. En primer lugar, ¿cómo interpretar L.I. cuando atraviesa totalmente una cortadura?



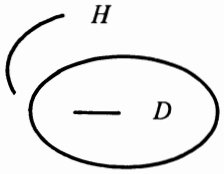
Si se recuerda la interpretación de un *"pseudográfico"* se ve que la figura precedente indica la no identidad de los individuos designados por las extremidades de L.I. (Cf. C.P. 4.467-468). Así el gráfico:



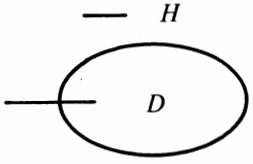
significa que "alguien es hombre y alguien que no es el mismo individuo es también hombre". Podría pues traducirse: *"existen al menos dos hombres"* (C.P. 4.468; Cf. igualmente 4.458).

Un segundo caso que debe considerarse en aquel en que la línea de identidad se termina sobre una cortadura, por ejemplo en las siguientes figuras:

Debe recordarse aquí que los puntos sobre una cortadura se considera como si estuvieran fuera de la superficie cercada por la cortadura (Cf. C.P. 4.501). Bajo estas condiciones, la figura izquierda equivale a la siguiente figura:



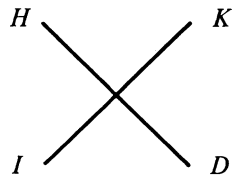
y significa: "Algo es *H* y nada es *D*"; mientras que la figura de la derecha equivale a la figura siguiente:



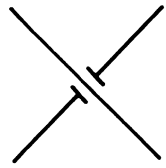
que significa: "Algo es *H* y algo no es *D*" (Cf. C.P. 4.502-503).

El último caso atañe a las intersecciones de líneas de identidad. La interpretación

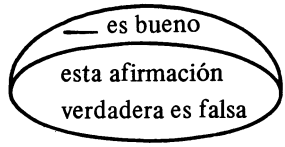
es fácil si se nota que una línea de identidad simboliza la identidad de todos los individuos que representa. Así:



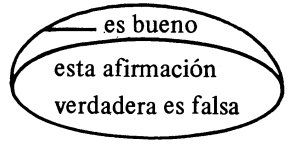
significará: "Algo es *H* y *D* e *I* y *K*". Si se desea representar: "Algo es *H* y *D* y algo (no lo mismo) es *I* y *K*", se utilizará entonces un *"puente"* (C.P. 4.561):



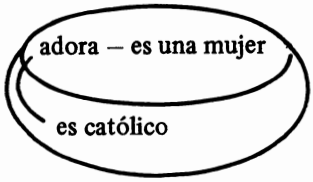
Para acabar esta breve presentación de las convenciones de escritura, damos algunos ejemplos de gráficos un poco más complejos que los hasta aquí utilizados, ofreciendo al mismo tiempo la traducción dada por PEIRCE:



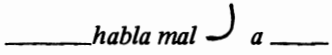
"Si es verdad que algo es bueno, entonces esta afirmación es falsa. Dicho de otra manera, la afirmación es que nada es bueno" (C.P. 4.452).



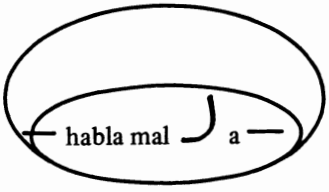
"Alguna cosa, x, existe y sólo de este individuo que existe, x, se afirma que si éste *es bueno, la afirmación es falsa. Lo que significa pues: algo no es bueno"* (C.P. ibid.).



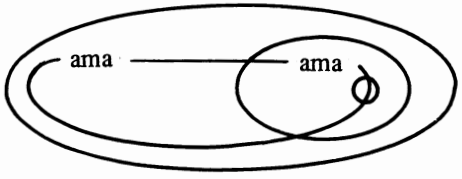
"Cualquiera que sea el católico de que se trate, adora a una u otra mujer" (C.P. ibid.).



Alguien habla mal de alguien a alguien" (C.P. 4.453).



"Cada cual habla mal de alguien a alguien" (C.P. ibid.).



"Cualesquiera que sean x e y, en que x no ama a y, o bien existe alguna cosa, L, y x no es L pero y ama a L; lo cual quiere decir: nadie ama a quienquiera que no ame a alguna otra persona" (C.P. 4.458).

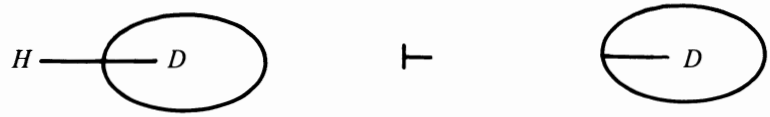
2.22. Las reglas de transformación

Las reglas enunciadas por PEIRCE para Beta son paralelas a las del sistema Alfa. Se presentan como cláusulas que extienden las reglas Alfa para dar cuenta de la línea de identidad. Se simbolizarán por $R'1, R'2, R'3$, desdoblando cada una como lo habíamos hecho en el capítulo precedente.

R'1— Inserción y eliminación[78]

1) *R'1 (el.)* Cf. C.P. 4.417 y 505.

a) Un gráfico cercado por un número par (o nulo) de cortaduras puede borrarse. Si por ejemplo:

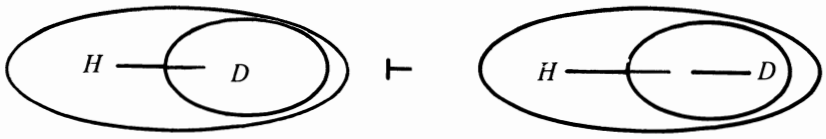


$(\exists x)\ (H(x) \wedge \neg D(x))$ $\qquad$ $(\exists x)\ \neg D(x)$

b) A esta eliminación podría asimilarse la introducción de soluciones de continuidad en la línea de identidad. Se añadirá entonces la cláusula siguiente: Sobre toda superficie cercada por un número par (o nulo) de cortaduras, podemos hacer discontinua toda L.I. Así,

$(\exists x)\ (H(x) \wedge D(x))$ $\qquad$ $(\exists x)\ H(x) \wedge (\exists y)\ D(y)$

Y por lo mismo:



$\neg(\exists x)\ (H(x) \wedge \neg D(x))$ $\qquad$ $\neg[(\exists x)\ H(x) \wedge \neg(\exists y)\ D(y)]$

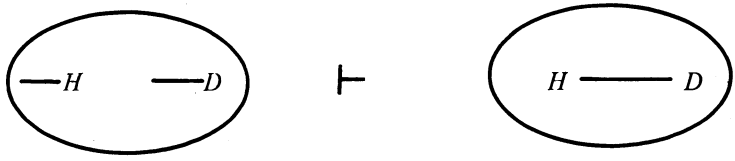
2) *R'1 (ins.)* Cf. C.P. 4.417 y 505.

c) Todo gráfico puede inscribirse en un número impar de cortaduras:

$(\exists x)\ (D(x) \wedge \neg H(x))$ $\qquad$ $(\exists x)\ [D(x) \wedge \neg(H(x) \wedge (\exists y)\ I(y))]$

[78] En vista de que la noción de gráfico no siempre es muy clara en la obra de PEIRCE (¿Son gráficos los elementos de un gráfico?), emplearemos en lo sucesivo el término gráfico en el sentido técnico definido más adelante por medio de las reglas de formación dadas en las páginas 130-131.

b) Puede hallarse una afinidad entre esta inserción y la unión de dos terminaciones libres de L.I. en toda superficie cercada por un número impar de cortaduras:

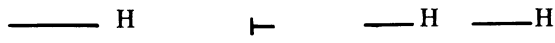


$\neg[(\exists x)\, H(x) \wedge (\exists y)\, D(y)]$ $\qquad$ $\neg(\exists x)\,(H(x) \wedge D(x))$

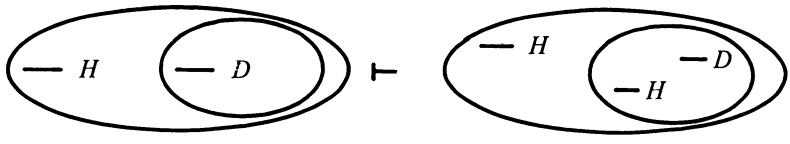
R'2—Iteración y "desiteración"

1) *R'2 (it.)* Cf. C.P. 4.506.

a) Todo gráfico ya dado puede volverse a escribir, sea sobre la superficie del primero, sea en una superficie (ya dada) rodeada de un número superior de cortaduras que se encuentre en el interior de la superficie sobre la que se encuentra el gráfico original:



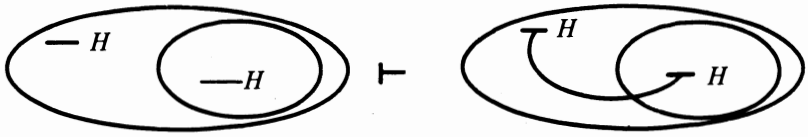
$(\exists x)\, H(x)$ $\qquad$ $(\exists x)\, H(x) \wedge (\exists y)\, H(y)$



$\neg[(\exists x)\, H(x) \wedge \neg(\exists y)\, D(y)]$ $\qquad$ $\neg[(\exists x)\, H(x) \wedge \neg((\exists y)\, D(y) \wedge (\exists z)\, H(z))]$

b) Pero esta regla de iteración conlleva una cláusula propia del sistema Beta: puede unirse por medio de una rama la L.I. del gráfico primitivo a la L.I. del gráfico iterado:

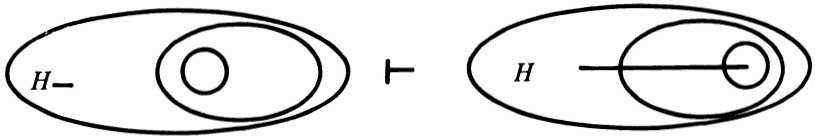
$(\exists x)\, H(x) \wedge (\exists y)\, H(y)$ $\qquad$ $(\exists x)\,(H(x) \wedge H(x))$



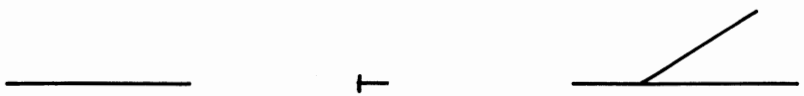
$\neg [(\exists x)\, H(x) \wedge \neg (\exists y) \cdot H(y)]$ $\qquad$ $\neg (\exists x)\, (H(x) \wedge \neg H(x))$

La interpretación es fácil en este caso: la identificación de las dos L.I. en la parte derecha de las dos figuras precedentes se comprende, si se observa que el gráfico iterado no es más que una repetición del gráfico original.

c) La regla de iteración permite la extensión de una extremidad libre de L.I. hacia un entramado interno de cortaduras, a condición de que la extremidad quede libre:

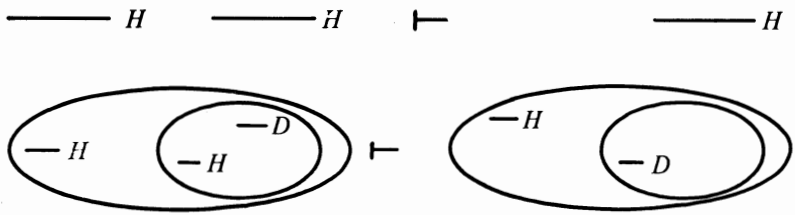


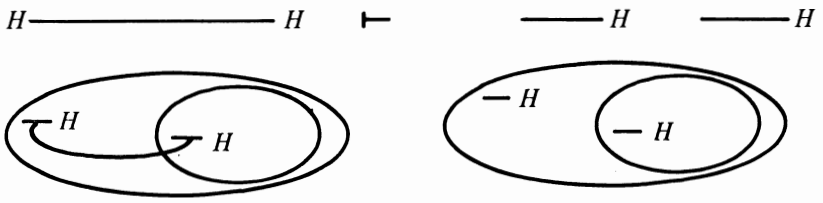
d) La regla de iteración permite finalmente la conexión de una L.I. sobre una L.I. ya existente (y sobre la misma superficie que esta última):

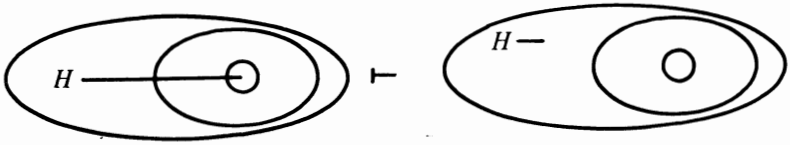


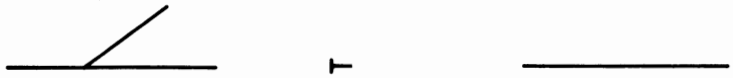
2) *R'2 (Desit.).*

Toda aparición iterada de un gráfico puede ser borrada. Por tanto, tenemos, a la inversa, los esquemas siguientes:

a) 

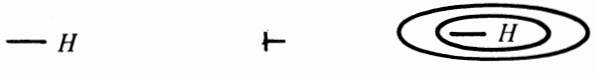
b) 

c) 

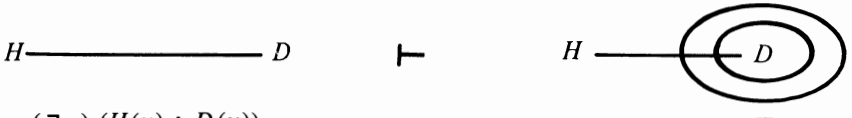
d) 

R'3 – Regla de la doble cortadura. Cf. C.P. 4.417, 508.

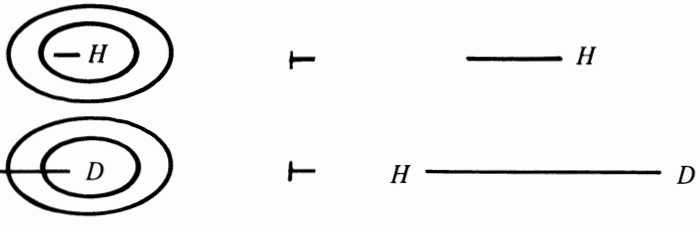
La doble cortadura puede o bien inscribirse alrededor de todo gráfico y de todo lugar predicativo, o bien eliminarse de toda la superficie en que se encuentra (si una L.I. atraviesa la doble cortadura, debe estar ininterrumpida en la superficie entre las dos cortaduras, como PEIRCE lo nota en C.P. 4.508).



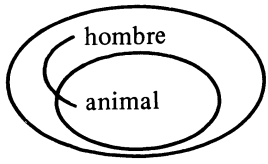
$(\exists x)\, H(x)$ $\quad\vdash\quad$ $\neg\neg\,(\exists x)\, H(x)$



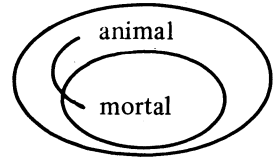
$(\exists x)\,(H(x) \wedge D(x))$ $\quad\vdash\quad$ $(\exists x)\,(H(x) \wedge \neg\neg D(x))$

o a la inversa: 

PEIRCE, en un artículo aparecido en The Monist en 1906[79], parece ante todo haber querido reservar la utilización de las reglas precedentes para facilitar la *"resolución"* de los problemas lógicos. *"El sistema de los gráficos existenciales... facilita grandemente la resolución de los problemas de lógica... no por obra de propiedades misteriosas sino simplemnte porque substituye los símbolos, en los cuales estos problememas se presentan, por figuras concretas que saltan a la vista, acerca de las cuales sólo tenemos que decir si entre sus partes admiten o no relaciones que puedan describirse"* (C.P. 4.571). PEIRCE ofrece dos ejemplos de demostración de silogismos clásicos. En el artículo de 1906 que acaba de citarse, PEIRCE añaliza el razonamiento en BARBARA (Cf. C.P. 4.571). Haciendo uso de los gráficos se percibe que el razonamiento consiste en pasar del gráfico[80]:

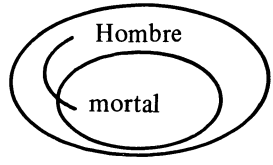


Todo hombre es animal
(Premisa 1)



Todo animal es mortal
(Premisa 2)

al gráfico:



Todo hombre es mortal (conclusión)

Demostración:

Después de haber inscrito las dos premisas[81]:

---

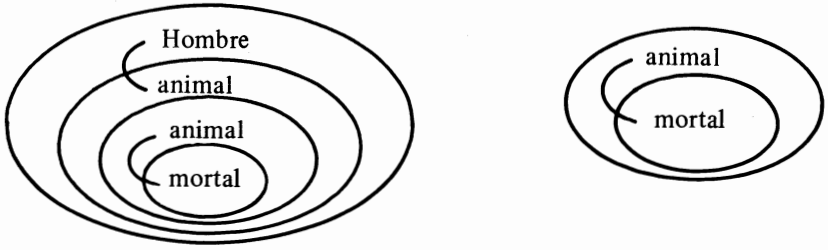
[79] "Prolegomena to an Apology for Pragmaticsm", *The Monist*, 16 (1906), pp. 492-546 (con correcciones en el vol. 17, p. 160).

[80] Cf. C.P. 4.571. Merece notarse que PEIRCE utiliza cortaduras punteadas cuyo sentido particular veremos en el próximo capítulo (el razonamiento no es válido por cierto más que si se consideran sólo las cortaduras ordinarias).

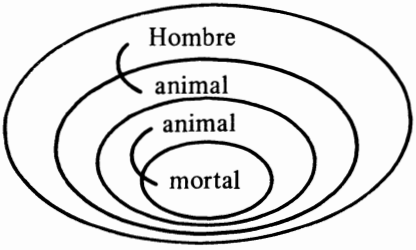
[81] Cosa que siempre puede hacerse en virtud de la llamada regla de "aserción" que es la misma que la usada en el sistema Alfa (Cf. Cap. 1, n. 123). La demostración de PEIRCE utiliza siete etapas, pero añadiremos una para mayor claridad.

las transformaciones son las siguientes:

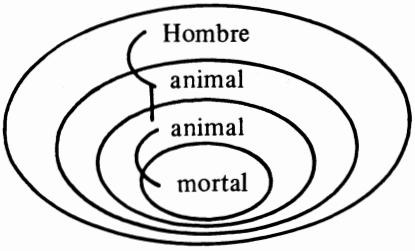
1) Por *R'2* (it) a, se obtiene el gráfico siguiente volviendo a escribir la 2.ª premisa en la 1.ª:



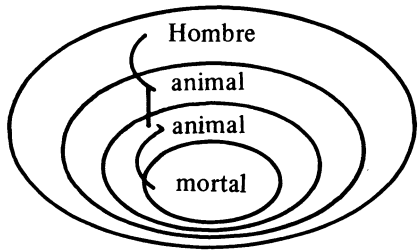
2) *R'1* (el) a: eliminación de la 2.ª premisa (cercada en un número nulo de cortaduras)



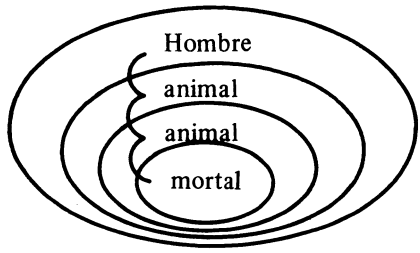
3) *R'2* (it) c: Extensión de una L.I. hacia el interior de la superficie cercada por la cortadura que se encuentra sobre la misma superficie de la L.I.:



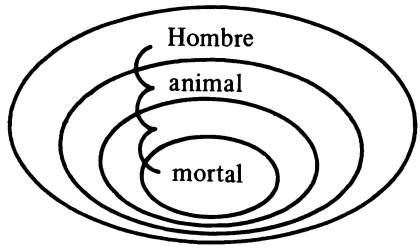
4) *R'2* (it) d: Anexión de una rama a una L.I. (en general se pasará directamente de la etapa 4 a la etapa 6):



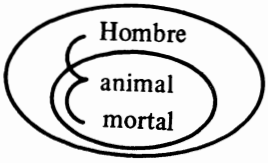
5) *R'1* (ins) b: Unión de dos terminaciones libres de L.I. en toda superficie impar:



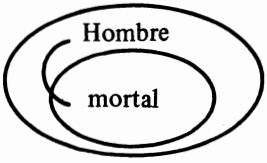
6) *R'2* (desit) a: "Desiteración" del gráfico "____animal" que está cercado por un número más elevado de cortaduras que la otra vez en que aparece el gráfico.



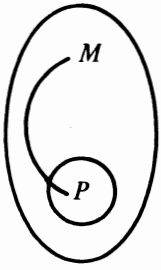
7) *R'3:* Supresión de la doble cortadura:



8) *R'1* (el) a: Eliminación del gráfico "____ animal" cercado en un número par de cortaduras:



Se obtiene entonces la conclusión: "Todo hombre es mortal." Un segundo ejemplo de demostración silogística es dado por PEIRCE en un artículo aparecido en 1901 en el *Baldwin's Dictionary of Philosophy and Psychology*[82]. PEIRCE utiliza aquí una notación algo diferente[83] que transcribimos al simbolismo usual de los gráficos existenciales. El razonamiento en Baroco consiste entonces en pasar de gráfico:



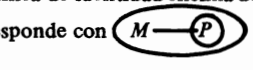
"Todo *M* es *P*"

"Algún *S* no es *P*"

al gráfico:

---

[82] Artículo "Symbolic Logic", *Baldwin's Dictionary of Philosophy & Psychology*, II (1901), pp. 645-650.

[83] Utiliza paréntesis o corchetes para las cortaduras y escribe la línea de identidad encima de las letras que simbolizan los lugares predicativos. Así $\{\overline{M\,[P]}\}$ se corresponde con 

, es decir "Todo *M* es *P*" (Cf. C.P. 4.387).

"Algún *S* no es *M*"

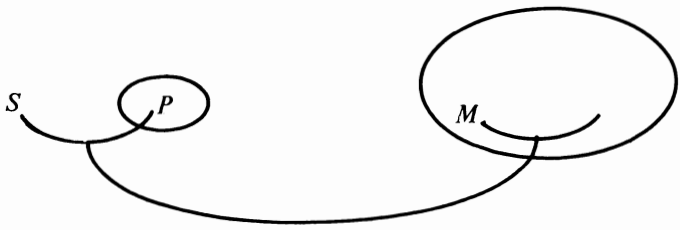
Demostración:

1) Se inscriben las dos premisas sobre la hoja de aserción.

2) *R'2* (it) *c:*

3) *R'1* (ins) *b:*

4) *R'2* (desit) *a:*



5) *R'1* (el) *a:*

que es la conclusión buscada.

2.23. Beta como sistema deductivo

Las demostraciones que acabamos de presentar nos sugieren que PEIRCE destinaba sus gráficos a la ilustración de las derivaciones de la silogística clásica. Pero cabe preguntarse si Beta no es adecuado para el moderno cálculo de predicados. Semejante estudio resulta muy delicado por causa del tipo muy particular de representación de las variables individuales y por el método propuesto por PEIRCE para la cuantificación de estos últimos.

Ante todo es necesario señalar que el sistema Beta se caracteriza por la ausencia de gráficos que correspondan a las fórmulas libres del cálculo de predicados: toda tesis de Beta será pues una fórmula cerrada[84]. Este hecho no es tan restrictivo como podría pensarse, ya que toda tesis libre puede cerrarse[85]. El sistema desarrollado por Quine en *Mathematical Logic*[86], nos obrece un ejemplo de sistema completo y consistente donde toda tesis es una fórmula cerrada. Por cierto que nuestra demostración de la completud (en sentido débil) de Beta utilizará este sistema.

Previamente nos hace falta presentar brevemente el alfabeto y las reglas que se utilizarán. El alfabeto comprenderá:

– el término vacío; Λ

– dos constantes lógicas: la conjunción simbolizada por la yuxtaposición de dos gráficos bien construidos (gbc); la negación se representará por medio de la cortadura.

– un segmento de recta llamado "línea de identidad" (L.I.) que servirá para la representación a la vez del individuo y de la cuantificación existencial.

– las letras *A, B, C,* ... llamadas lugares predicativos y que se corresponden con los predicados del cálculo usual.

Las reglas de formación serán las siguientes (donde *A, B* son lugares predicativos y ____ una L.I.):

---

[84] Recuérdese que en la formulación algebraica de 1885 PEIRCE utilizaba un método de deducción, en el marco del cálculo de predicados, sin eliminación total de los cuantificadores.

[85] Este "cerramiento" se obtiene al poner como prefijo una sucesión de cuantificadores universales que unen las variables de la tesis libre.

[86] QUINE, *op. cit.*, p. 88.

F_1: El término vacío es una gbc (para la escritura reducida vale aquí la misma convención que en alfa: cf. p. 65).

F_2: Si X es un gbc entonces $\textcircled{X}$ es una gbc obtenido al rodear X por medio de una cortadura no secante con otras cortaduras,

F_3: Si X e Y son gbc entonces XY es un gbc,

F_4: $\_A$, $A\_$, $\_A\_$, $\_A\_$ son gbc obtenidos al unir una o varias L.I. con un lugar predicativo.

F_5: Si $\_A$ es un gbc entonces $\square$ es un gbc obtenido al unir nuevas L.I. sobre una L.I. ya dada.

F_6: Si $\_A$ es un gbc entonces $\textcircled{A}$ es un gbc obtenido al rodear el lugar predicativo A por medio de una cortadura (que de esta manera viene a cortar las L.I. que hay enganchadas a A).

F_7: Si $\_A$ y $\_B$ son gbc entonces A ____ B es un gbc obtenido al unir las L.I. (se representará a menudo bajo la forma A B).

El paso de la escritura peirciana a la escritura usual con paréntesis se hará por medio de las reglas de traducción siguientes:

T_1 $\alpha\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta)$ donde α y β son gráficos de Beta

T_2 $\textcircled{\alpha} \rightarrow \neg\alpha$ donde α es un gráfico de Beta[87]

T_3 $\Lambda \rightarrow B \Rightarrow B$ donde B es una fórmula del cálculo de predicados.

T_4: Con el fin de indicar el orden de las variables en las partes libres de las fórmulas del cálculo usual siempre introduciremos una localización espacial de las L.I. unidas a los lugares predicativos, de tal forma que la lectura de las L.I. se haga partiendo de la izquierda de un lugar predicativo hacia la derecha y a continuación de arriba hacia abajo. Por otra parte para evitar las confusiones acerca de los individuos representados se podrá escribir sobre cada L.I. una variable que representa a los individuos: así $\underline{\ x\ }$ indicará que la cuantificación existencial atañe a las x. Finalmente, cuando ello sea necesario, se podrá utilizar un sistema de índices que permita indicar el lugar de cada cuantificador. Se anexionará a las variables que estén sobre las L.I. de Beta unos índices calculados de la manera siguiente (donde F y G son fórmulas del cálculo usual de predicados):

a) F atómica $\rightarrow F^0$

b) $F^n \rightarrow (\exists x)\, F^{n+1}$

c) $F^m, G^n \rightarrow (F \wedge G)^{r+1}$ donde $r = \max(m, n)$.

Se tendrán, por ejemplo, las traducciones siguientes:

* $(\exists x)\,(\exists z)\,(\exists y)\,A(y\,x\,z) \rightarrow \underline{\ y^1\ } A \underline{\ x^3\ z^2\ }$

[87] Cuando varias cortaduras están encajadas la lectura deberá hacerse siempre yendo del exterior hacia el interior.

En efecto, después de haber localizado las variables que están sobre las L.I. teniendo en cuenta el orden de las variables en $A\,(y\,x\,z)$, se observa que:

$A(y\,x\,z)$ tiene 0 por índice

$(\exists y)\ A\,(y\,x\,z)$ tiene 1 por índice (por tanto y^1)

$(\exists z)\ (\exists y)\ A\,(y\,x\,z)$ tiene 2 por índice (por tanto z^2)

$(\exists x)\ (\exists z)\ (\exists y)\ A\,(y\,x\,z)$ tiene 3 por índice (por tanto x^3)

* $(\exists x)\ (A(x) \wedge (\exists z)\ B(z)) \rightarrow \underline{\overset{x^3}{\quad}}\ A \qquad \underline{\overset{z^1}{\quad}}\ B$

ya que $B\,(z)$ tiene 0 por índice

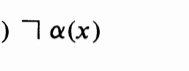
$(\exists\, z)\ B(z)$ tiene 1 por índice (por tanto z^1)

$A(x) \wedge (\exists\, z)\ B\,(z)$ tiene 2 por índice

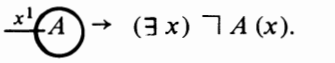
$(\exists\, x)\ (A(x) \wedge (\exists\, z)\ B(z))$ tiene 3 por índice (por tanto x^3)

* $(\exists x)\ (\exists z)\ (A(x) \wedge B(z)) \rightarrow \underline{\overset{x^3}{\quad}}\ A \qquad \underline{\overset{z^2}{\quad}}\ B$

* $(\exists x)\ (A(x) \wedge (\exists y)\ B(y\,x)) \rightarrow \underline{\overset{x^3}{\quad}} A \qquad \underline{\overset{y^1}{\quad}}\ B\ \underline{\overset{x}{\quad}}$

T_5  $(\exists\, x)\ \neg\,\alpha(x)$

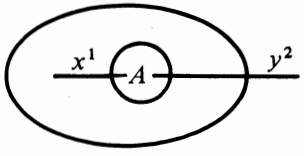
donde α está unida a una L.I. que se refiere a unas x. Por ejemplo:



La traducción de las expresiones universales se hará entonces utilizando las equivalencias entre cuantificadores. Así

$$(\exists y)\ (\forall x)\ A(x\,y) \text{ es equivalente a } (\exists y)\ \neg\ (\exists x)\ \neg\ A(x\,y)$$

que se expresará bajo la forma



T_6 $\alpha \underline{\overset{x^n}{\quad}} \beta \rightarrow (\exists\, x)\ (\alpha(x) \wedge \beta(x))$ donde α y β están unidos por una L.I. que se refiere a x. Así:

$$A \underline{\overset{x^2}{\quad}} B \rightarrow (\exists x)\ (A(x) \wedge B(x)).$$

Se observará pues que, para adecuar al tratamiento moderno del cálculo de predicados la formulación peirciana, hemos introducido la localización espacial de las L.I. enganchadas a los lugares predicativos. Por otra parte, para extender el poder de expresión del sistema utilizamos, cuando ello resulta necesario, variables con índices situadas sobre L.I. Por ello usaremos en adelante el término Beta* para distinguir el sistema así obtenido del sistema original de PEIRCE. Para la deducción utilizaremos el axioma de Alfa**, a saber, el término vacío. En cuanto a las reglas, utilizaremos todas las que se han dado arriba, en las págs. 113-117, salvo $R'2$ (it) c, $R'2$ (desit) b y $R'2$ (desit) d. Se utilizarán igualmente las equivalencias entre cuantificadores. Para demostrar la consistencia y la completud de este sistema usaremos un tipo de demostración ya utilizado en el capítulo precedente. Es decir que demostraremos que Beta* es deductivamente equivalente al sistema de QUINE cuya consistencia y completud se conocen por otro lado.

En una primera etapa, derivaremos de Beta* los axiomas y reglas del sistema de QUINE.

Ax. 1 El primer "axioma de cuantificación" de QUINE[88] consiste en admitir como teoremas los cierres de todas las tesis libres del cálculo de predicados. Se sabe que las tesis libres del cálculo de predicados se obtienen por substitución a partir de las tautologías del cálculo de proposiciones. Nos bastará pues con derivar en Beta* los cerramientos de las tesis libres correspondientes a los axiomas de un sistema completo de cálculo de proposiciones y con poder utilizar a continuación el modus ponens. Elegiremos, como en el capítulo anterior, el sistema de ROSSER. Nos hace falta pues derivar en Beta* las tres fórmulas siguientes, que se corresponden respectivamente con los axiomas 1, 2 y 3 de ROSSER (nos limitaremos, por razones de simplicidad, a los casos de una sola variable):

1. $(\forall x)\ [P(x) \Rightarrow (P(x) \wedge P(x))]$
2. $(\forall x)\ [(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow P(x)]$
3. $(\forall x)\ [(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\neg\, (Q(x) \wedge R(x)) \Rightarrow \neg\, (R(x) \wedge P(x)))]$.

Demostración:

1) La primera fórmula puede escribirse bajo la forma:

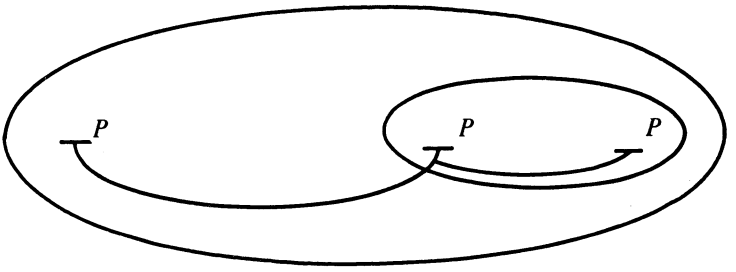
$$\neg\, (\exists x)\ [P(x) \wedge \neg\, (P(x) \wedge P(x))]$$

o gráficamente[89]:

---

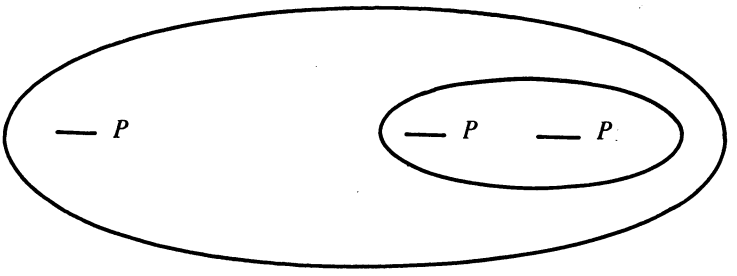
[88] QUINE, *op. cit.*, pp. 81, 82, 88.

[89] Puesto que no existe ambigüedad alguna en la lectura, no utilizaremos variables con índices para la demostración de los tres primeros axiomas.

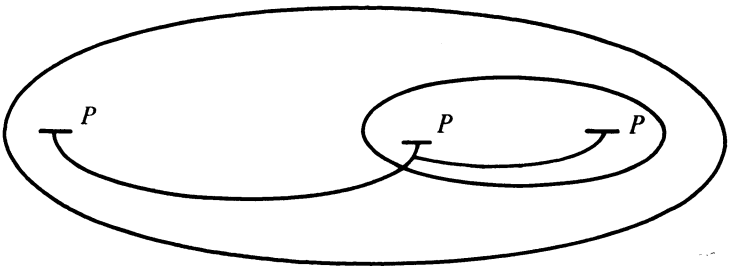


La demostración se efectuará en 2 etapas:

1 – por alfa**



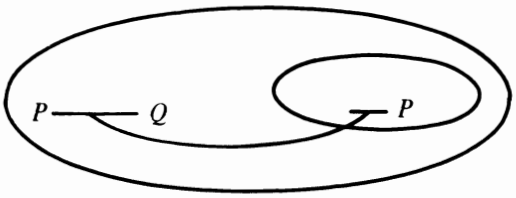
2 – $R'2$ (it) b



2) la segunda fórmula se escribirá:

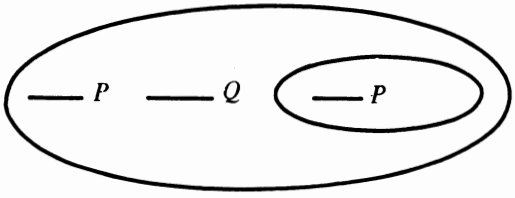
$$\neg (\exists x)\ [(P(x) \wedge Q(x)) \wedge \neg P(x)]$$

o gráficamente:

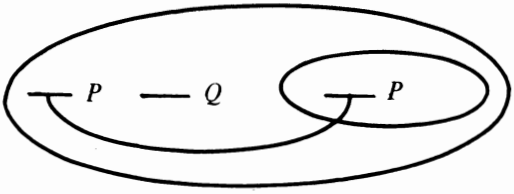


Demostración:

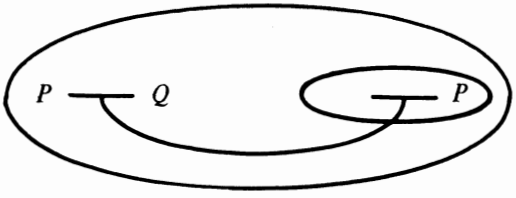
1 – Por alfa**



2 – $R'2$ (it) b



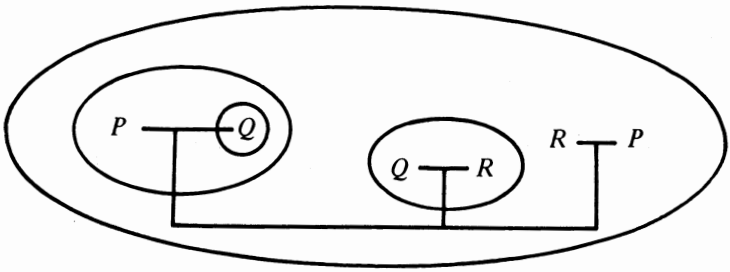
3 – $R'1$ (ins) b



3) La última fórmula es la siguiente:

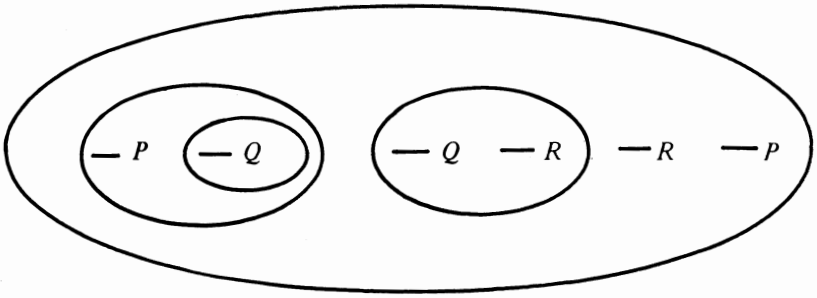
$$\neg (\exists x) [\neg (P(x) \wedge \neg Q(x)) \wedge \neg (Q(x) \wedge R(x)) \wedge (R(x) \wedge P(x))]$$

es decir, gráficamente:

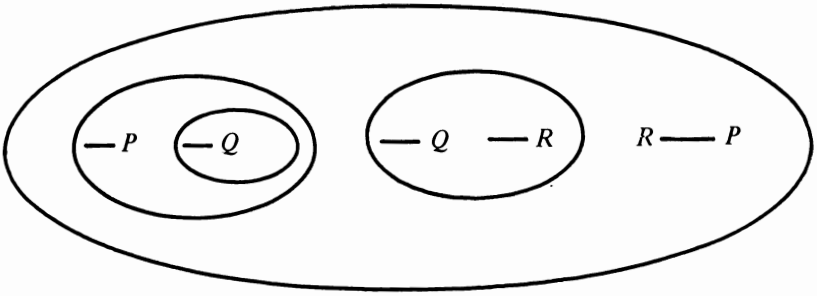


Demostración:

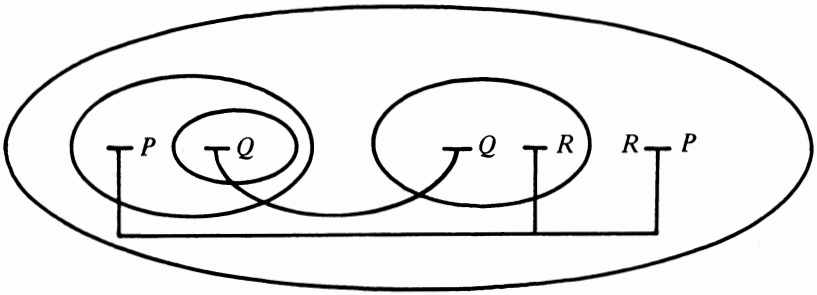
1 – Por alfa**:



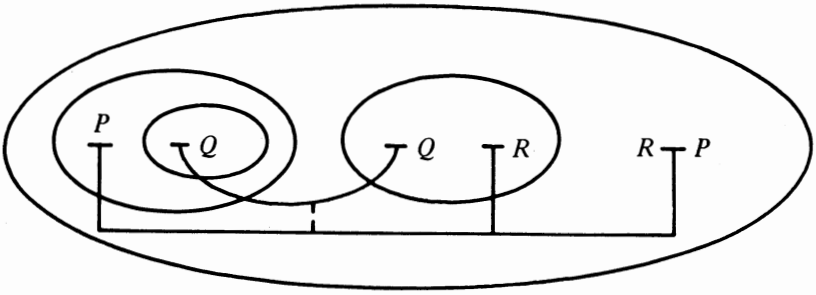
2 –*R'1* (ins) *b*



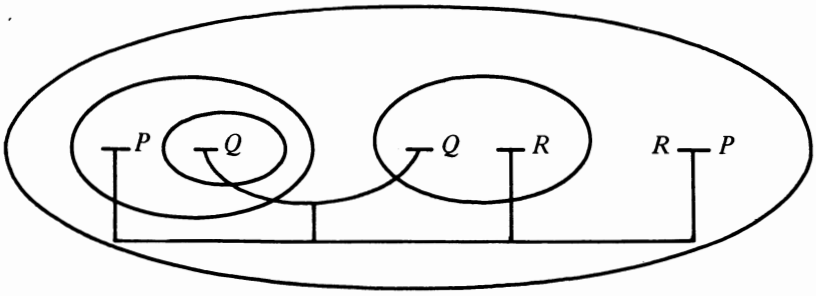
3 – *R'2* (it) *b*



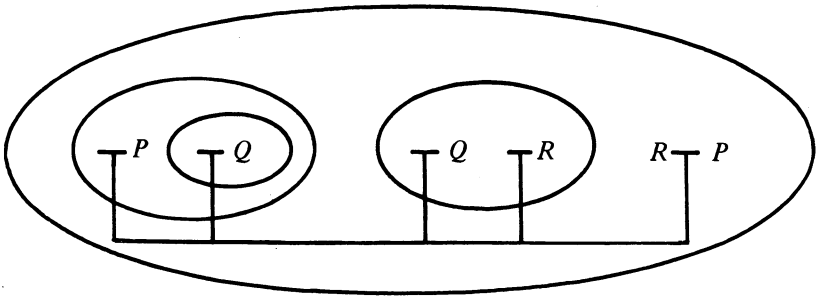
4 – *R'2* (it) *d*



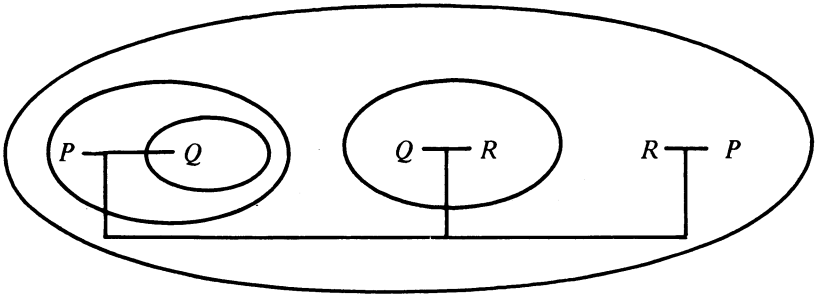
5 – *R'1* (ins) *b*



Lo cual puede representarse bajo la forma:



o incluso (puesto que la misma L.I. une todos los lugares predicativos)



Para acabar nuestra demostración, nos basta ahora con derivar la regla de separación utilizada por QUINE[90]: Si $A \Rightarrow B$ y A son teoremas, entonces B es un teorema. La demostración no plantea aquí ningún problema. En efecto, los teoremas, en QUINE como en PEIRCE, no pueden ser más que fórmulas cerradas. Por tanto A y B son fórmulas cerradas y de esta manera no se junta a ellas ninguna L.I. En estas condiciones, la demostración de esta regla es rigurosamente paralela a la que se ha dado para el modus ponens en Alfa.

Ax. 2 Por el segundo axioma de QUINE admitimos como teoremas los cerramientos de las fórmulas del tipo:

$$(\forall a)\ (A \Rightarrow B) \Rightarrow ((\forall a)\ A \Rightarrow (\forall a)\ B)$$

Derivamos aquí el siguiente ejemplo particular[91]:

---

[90] QUINE, *op. cit.*, p. 88.

[91] Tal como anota QUINE, si A y B tienen una variable libre distinta de a, el conjunto será una fórmula libre y no una proposición; pero su cerramiento será verdadero (QUINE, *op. cit.*, p. 82). Debe también notarse que en esta fórmula A y B no contienen cada una más que en una ocasión la variable distribuida x. Pero con facilidad se ve que la demostración es conveniente cualquiera que sea el número de veces en que aparece x.

$$(\forall x)\ (P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow ((\forall x)\ P(x) \Rightarrow (\forall x)\ Q(x))$$

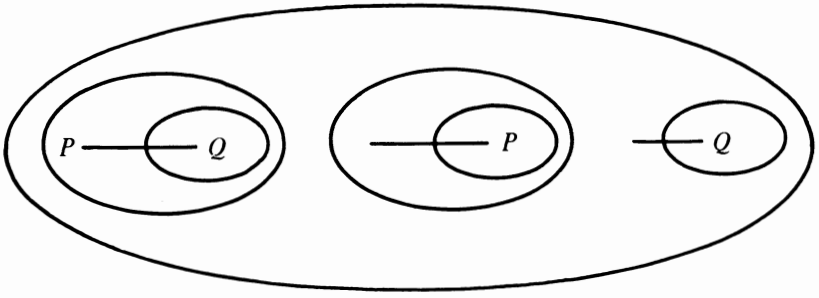
o:

$$\neg\,[\neg(\exists x)\ \neg\neg(P(x) \wedge \neg\, Q(x)) \wedge \neg\neg\,(\neg(\exists x)\ \neg P(x) \wedge \neg\neg\,(\exists x)\ \neg Q(x))]$$

es decir:

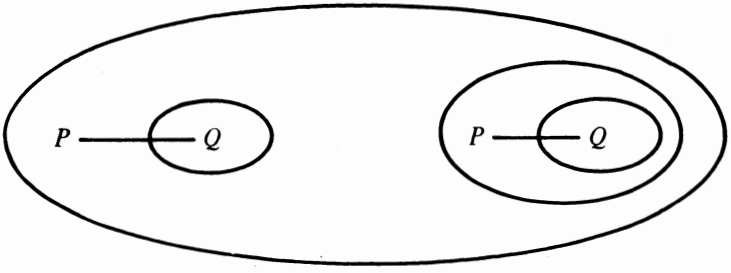
$$\neg\,[\neg(\exists x)\ (P(x) \wedge \neg\, Q(x)) \wedge \neg\,(\exists x)\ \neg P(x) \wedge (\exists x)\ \neg\, Q(x)]$$

o gráficamente:

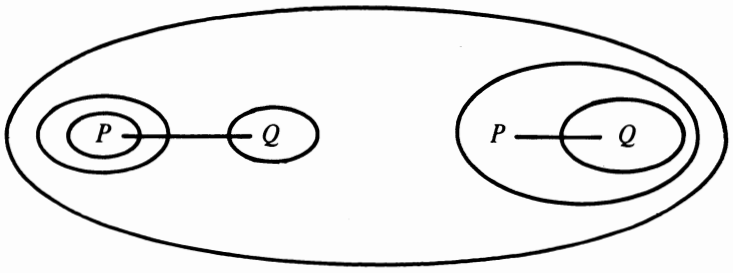


Demostración:

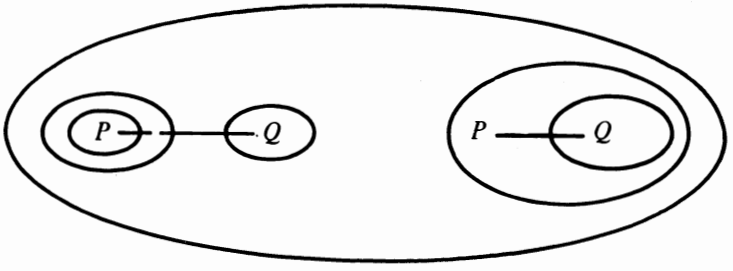
1 – por alfa**:



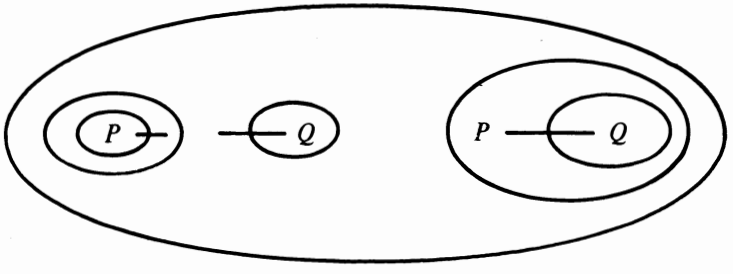
2 – *R'3:* inserción de la doble cortadura alrededor de *P*:



3 – *R'1* (el) *b:* eliminación de L.I. en la superficie rodeada por 2 cortaduras:



4 – *R'2* (desit) *c:* contracción de L.I.



Ax. 3 Sea *B* el cerramiento de $A \Rightarrow (\forall a)\, A$, donde la variable *a* no está libre en *A*. Se tendrá entonces *B* como teorema.

Derivaremos el ejemplo de QUINE, donde no hay ninguna variable libre en *A* (de modo que el cuantificador $(\forall\, a)$ estará pues vacío)[92]:

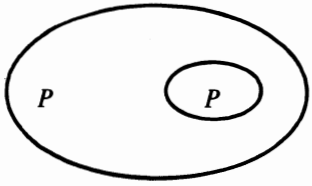
[92] La extensión a los casos con variables libres no presenta especial dificultad (Cf. QUINE, *op. cit.*, p. 82).

$$P \Rightarrow (\forall x)\ P$$

o

$$P \Rightarrow P$$

es decir, gráficamente:



lo cual puede derivarse por alfa**.

Ax. 4 Sea B el cerramiento de $(\forall a)\ A \Rightarrow A'$ donde A' no difiere de A sino porque en ella aparece b libre siempre que en A aparece libre a. Se tendrá entonces B como teorema.

Nos contentaremos con derivar la fórmula particular de QUINE donde la única variable libre en $(\forall a)\ A \Rightarrow A'$ es b, es decir donde $(\forall a)\ A$ no contiene variable libre alguna[93]:

$$(\forall y)\ [(\forall x)\ P(x) \Rightarrow P(y)]$$

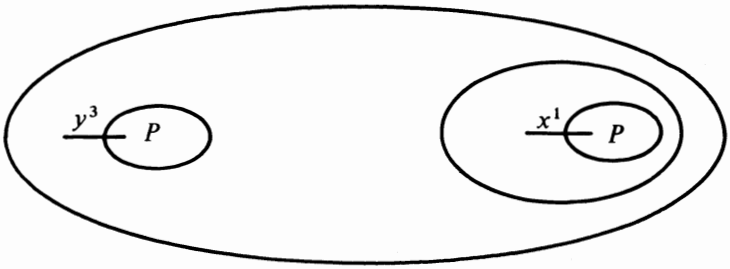
o

$$\neg (\exists y)\ \neg \neg [\neg (\exists x)\ \neg P(x) \wedge \neg P(y)]$$

es decir

$$\neg (\exists y)\ [\neg P(y) \wedge \neg (\exists x)\ \neg P(x)]$$

o gráficamente:



[93] La extensión a los casos en que hay otras variables libres no plantea problema especial (Cf. QUINE, *op. cit.*, pp. 82 ss.).

Demostración:

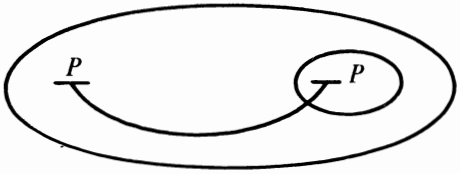
1 – Se sabe por el axioma 1 que los cerramientos de las tesis libres son teoremas de Beta*, por tanto:

$$(\forall x) \neg (P(x) \wedge \neg P(x))$$

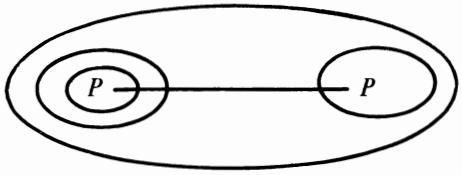
o

$$\neg (\exists x) (P(x) \wedge \neg P(x))$$

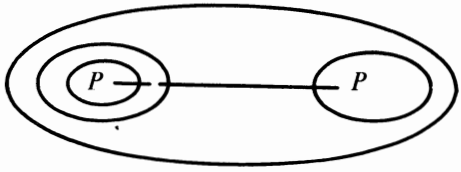
es decir:



2 – *R'3:*



3 – *R'1* (el) *b:*



4 – *R'2* (desit) *c:* contracción de L.I.

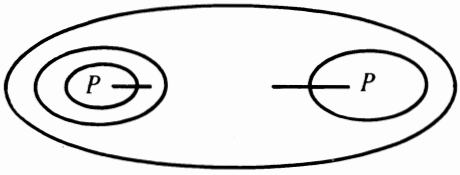
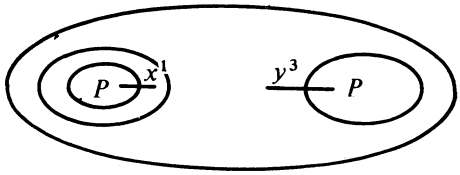


figura de la cual se dará la siguiente traducción:



En una segunda etapa se tratará de derivar Beta* del sistema de QUINE. Basta entonces con observar que la regla de eliminación de la implicación en la consecuencia, aplicada a ciertas tesis de QUINE, nos vuelve a dar nuevamente las reglas de Beta* que se corresponden todas ellas con esquemas de deducción válidos[94]. Al ser los dos sistemas deductivamente equivalentes, Beta* aparece pues como un sistema consistente y completo. Estas propiedades metateóricas del sistema Beta sorprenden a primera vista, dado lo alejada que está su notación de la que emplea el cálculo ordinario de predicados, en particular si se tiene en cuenta la ausencia de cuantificador explícito. Incluso el interés principal del sistema Beta* nos parece que reside en que introduce en lógica un concepto de "cuantificación implícita". La introducción de tal concepto por otra parte no deja de ser sorprendente en un hombre que, justo antes, acababa de introducir en lógica nuestros cuantificadores modernos. Después de PEIRCE este concepto no parece haber atraído la atención de los lógicos. La complejidad de los gráficos peircianos indudablemente no es ajena a este hecho. Pero cabe entonces preguntarse si una simplificación de la notación y de las reglas de PEIRCE no conduciría a resultados interesantes que podrían transformar o enriquecer las presentaciones actuales del cálculo de predicados.

[94] No haremos la demostración –que por otra parte es fácil– de la validez de las reglas de Beta.

Capítulo III

LOGICA DE "SEGUNDA INTENCION" Y LOGICA MODAL

LOGICA DE "SEGUNDA INTENCION" Y LOGICA MODAL

Ya habíamos notado que en 1903 PEIRCE, en una publicación hecha con ocasión de un ciclo de conferencias en el Lowell Institute, desarrollaba su sistema de gráficos existenciales en tres partes: nos queda, pues, por examinar la tercera denominada "gamma".

PEIRCE parece conceder a esta nueva sección una importancia especialísima. De ahí que escriba en Ms. 455 *"De los tres capítulos que exponen los gráficos existenciales, el tercero es con mucho el más importante y el más interesante. La esencia del razonamiento matemático encuentra aquí su exposición"*. Sin embargo PEIRCE no parece haber conseguido darnos en esta sección la unidad que poseyeron las precedentes. Nos encontramos frente a un conjunto de sistemas cuyas convenciones y reglas PEIRCE no llegó nunca a formular de una manera completa. PEIRCE además no ofrece más que escasas precisiones sobre la utilización de estos sistemas y él mismo reconoce que la sección gamma está inacabada a diferencia de las secciones alfa y beta: "... *esta parte gamma está todavía en sus primeros pasos. Pasarán muchos años antes de que mis sucesores puedan llevarla a la perfección que han alcanzado las partes alfa y beta. Pues la investigación lógica se hace muy lentamente; implica en efecto el examen de una masa confusa de ideas corrientes, que engloban no se sabe bien qué, y la necesidad de llevar a cabo un gran número de análisis, de generalizaciones y de experiencias antes incluso de que pueda abordarse... un nuevo dominio de investigación*" (C.P. 4.511). Al mismo tiempo que intentaremos poner algún orden en los escritos de PEIRCE, trataremos de mostrar la existencia de dos tipos de investigación: Una que se centra sobre lo que PEIRCE llama lógica de "*segunda intención*", la otra sobre una lógica de tipo modal. Para cada una de ellas trataremos de poner en paralelo las diversas formulaciones dadas por PEIRCE, como lo hemos hecho hasta aquí.

1. LA LOGICA DE "SEGUNDA INTENCION"

1.1. La formulación algebraica

El artículo de 1885, que sin duda es uno de los más importantes que PEIRCE ha escrito, comprende, tras el exámen de la lógica no relativa, dos secciones consagradas a la lógica de los relativos. Una se refiere a lo que llama "*la lógica de los relati-*

vos de primera intención" (C.P. 3, p. 226) y corresponde a la lógica de predicados que hemos estudiado en el capítulo precedente. La otra, consagrada a lo que llama "*lógica de segunda intención*" (C.P. 3, p. 233), se refiere a un nuevo tipo de relativos que querríamos estudiar ahora detalladamente.

El estudio de PEIRCE empieza por el enunciado de dos "*propiedades particulares*" (C.P. 3.398) que posee la identidad. La primera es enunciada bajo la forma:

$$\Pi_i \; \Pi_j \; \{\overline{1}_{ij} + \overline{x}_i + x_j\}. \tag{1}$$

donde 1 representa la relación de identidad, + la disyunción y x un predicado. PEIRCE la comenta en estos términos: "*...si i y j son idénticos, todo lo que es verdadero de i es verdadero de j*" (C.P. ibid). Conservando el simbolismo peirciano podríamos escribirla:

$$\Pi_i \; \Pi_j \; \{i = j \prec (x_i \prec x_j)\}$$

La segunda "*propiedad*" indica que "*si todo lo que es verdadero de i es verdadero de j entonces i y j son idénticos*" (C.P. ibid). Para simbolizarla PEIRCE utiliza aquí el signo q que significa "*la relación de una cualidad, de un carácter, de un hecho, o de un predicado con su sujeto*" (C.P. ibid). Bajo estas condiciones q_{ki} expresará que i tiene la cualidad k. La segunda "*propiedad*" de la identidad puede por tanto expresarse:

$$\Pi_i \; \Pi_j \; \Sigma_k \; (1_{ij} + \overline{q}_{ki} \, q_{kj}) \tag{2}$$

cosa que así se expresará de manera más familiar:

$$\Pi_i \; \Pi_j \; \Sigma_k \; ((q_{kj} \prec q_{ki}) \prec i = j)$$

PEIRCE nota entonces que la identidad puede definirse por medio de la ecuación:

$$1_{ij} = \text{def} \; \Pi_k \; (q_{ki} \, q_{kj} + \overline{q}_{ki} \overline{q}_{kj}) \tag{3}$$

lo cual se reduce a escribir (usando $\Leftrightarrow$ para la equivalencia)

$$i = j \quad \text{para} \quad \Pi_k (q_{ki} \Leftrightarrow q_{kj})$$

Pero ¿qué significa la introducción del símbolo q en las últimas expresiones? En (1) es de señalar que x no está cuantificada. Por el contrario en (2) intervienen una cuantificación que atañe a una variable predicativa. No cabe duda de que hay que investigar la razón del uso de q dado que hasta aquí los cuantificadores no han concernido más que a los índices, lo cual lleva a que se ponga x como índice (es de notar que PEIRCE prefiere aquí escribir q_{ki} mejor que q_{xi}, sin duda porque x, hasta el momento, no ha sido nunca utilizada como índice). Sin embargo, PEIRCE se da

cuenta de que el uso de q no es esencial pues añade (C.P. 3.398): "*Si nos parece bien, podemos ahorrarnos el símbolo q, utilizando el índice de un símbolo que tendrá el mismo papel en el cuatificador que los índices inferiores. Es decir, que podemos escribir*[1] :

$$1_{ij} = \text{def } \Pi_x \ (x_i x_j + \overline{x}_i \overline{x}_j)" \tag{4}$$

o

$$i = j \quad \text{para} \quad \Pi_x(x_i \Leftrightarrow x_j)$$

En el párrafo siguiente (C.P. 3.399) PEIRCE examina las propiedades del símbolo q.[2] Tenemos aquí una interesante anticipación de la teoría moderna de conjuntos, donde q juega el papel del ϵ de la pertenencia, de modo que q_{ki} puede interpretarse aquí como $i \epsilon k$.[3] En efecto el 9.º "icono" del artículo de 1885 expresa que "*todo individuo puede ser considerado como una clase*" (C.P. 3.399), cosa que PEIRCE expresa bajo la forma:

$$\Pi_i \ \Sigma_k \ \Pi_j \ q_{ki} \ (\overline{q}_{kj} + 1_{ij}) \tag{5}$$

y que podría escribirse:

$$\Pi_i \ \Sigma_k \ \Pi_j \ (i \ \epsilon \ k) \ (j \ \epsilon \ k \prec j = i)$$

Tal expresión significa más bien que para todo individuo dado existe una clase que tiene este individuo como miembro único. El 9.º icono se presenta, de esta manera, como el principio de la existencia de una clase unitaria para todo individuo.

El 10.º icono muestra que "*Dada una clase cualquiera, existe otra que incluye*

---

[1] Obsérvese que, al cuantificar variables predicativas en (2), (3), (4), PEIRCE anticipa la distinción moderna entre cálculos de 1.º y 2.º orden.

[2] Que en 1893 llama "relación de inherencia" (C.P. 4.81).

[3] Al interpretar q como la relación de pertenencia la definición n.º 3 de la identidad, arriba dada, se escribiría:

$$i = j \quad \text{para} \quad \Pi_k \ (i \epsilon k \Leftrightarrow j \epsilon k)$$

Una definición más general consistiría en escribir:

$$i = j \quad \text{para} \quad \Pi_k \ (k \epsilon i \Leftrightarrow k \epsilon j)$$

tal como lo muestra QUINE (Cf. *Mathematical Logic* (N.Y.: 1962), p. 136) que nota por cierto que la definición dada por PEIRCE en C.P. 3.48 –y que ya hemos presentado– se corresponde de hecho con ésta última fórmula que, en su forma actual, se encuentra en FRAENKEL (Cf. *Einleitung in die Mengenlehre* 3.ª ed. (1928), p. 272).

todo lo que la primera excluye y excluye todo lo que la primera incluye" (C.P. ibid.):

$$\Pi_l \Sigma_k \Pi_i (q_{li} \overline{q}_{ki} + \overline{q}_{li} q_{ki}) \tag{6}$$

es decir:

$$\Pi_l \Sigma_k \Pi_i (i \in k \Leftrightarrow \overline{i \in l})$$

que es el principio de la existencia del complemento de una clase.

El 11.° icono establece que *"Dadas dos clases cualesquiera, existe una tercera que incluye todo lo que la uno o la otra incluye y excluye todo lo que los dos conjuntos excluyen"* (C.P. ibid.):

$$\Pi_l \Pi_m \Sigma_k \Pi_i (q_{li} q_{ki} + q_{mi} q_{ki} + \overline{q}_{li} \overline{q}_{mi} \overline{q}_{ki}) . \tag{7}$$

es decir:

$$\Pi_l \Pi_m \Sigma_k \Pi_i (i \in k \Leftrightarrow (i \in l + i \in m))$$

con lo cual se expresa el principio de la existencia de la suma lógica de dos clases.

El 12.° icono expresa que: *"Dadas dos clases cualesquiera, existe una clase que incluye la totalidad de la primera y todo individuo de la segunda que puede no estar incluido en la primera, y nada más"* (C.P. ibid.), PEIRCE lo representa bajo la forma:

$$\Pi_l \Pi_m \Pi_i \Sigma_k \Pi_j \{q_{li} + \overline{q}_{mi} + q_{ki} (q_{kj} + \overline{q}_{lj})\} \tag{8}$$

es decir:

$$\Pi_l \Pi_m \Pi_i \Sigma_k \Pi_j \{(i \in m \prec\!\!\!- i \in l) + i \in k (j \in l \prec\!\!\!- j \in k)\}$$

Lo cual es completamente incomprensible. De hecho el 12.° icono no es más que una nueva formulación del 11.° icono. En efecto el 12.° icono podría expresarse bajo la forma $K = M \cup (L - M)$, lo cual es lo mismo que escribir $K = M \cup L$ (11.° icono). El 12.° icono debería pues formularse así:

$$\Pi_l \Pi_m \Sigma_k \Pi_j \{j \in K \Leftrightarrow (j \in M \vee j \in (L - M))\}$$

PEIRCE no deduce ninguna consecuencia de estos cuatros principios. Estos últimos son considerados por PEIRCE como si se hubieran obtenido a partir de un principio general que pretende resumir todas las propiedades de q. Sin embargo este principio no está enunciado. Además es dudoso que pueda darse un principio único que enuncie todas las propiedades del ϵ de la pertenencia.

En C.P. 3.401, PEIRCE estudia algunas propiedades de las relaciones. Introduce aquí un símbolo nuevo "r" que significa *"la relación conjunta de una... relación y de sus términos"* (C.P. 3.401). Así $r_{j\alpha i}$ expresa que j está en la relación binaria α con i, y r aparece entonces como un objeto de *"segunda intención"*. PEIRCE expre-

sa esto diciendo que *"habrá una serie de propiedades de r parecidas a las de q"* (C.P. ibid.). Pero en el espíritu de PEIRCE, "r" parece que debió ser utilizada con un fin muy particular: *"...la principal utilidad de r es la de permitirnos expresar que el número cardinal de una clase es al menos tan grande como el de otra"* (C.P. ibid.). PEIRCE nos introduce pues aquí en el dominio de la teoría de los números cardinales. Existen para PEIRCE varias maneras de expresar que el número cardinal de una clase a es al menos tan grande como el número cardinal de una clase b. El mejor método, dice PEIRCE, es el de utilizar la noción de correspondencia biunívoca. Si c_α expresa que la relación α es biunívoca, c puede ser definida por las tres fórmulas dadas por PEIRCE en C.P. 3.401:

$$\Pi_\alpha \Pi_u \Pi_v \Pi_w \ (\overline{c_\alpha} + \overline{r}_{u\alpha v} + \overline{r}_{u\alpha w} + 1_{vw}) \tag{9}$$

$$\Pi_\alpha \Pi_u \Pi_v \Pi_w \ (\overline{c_\alpha} + \overline{r}_{u\alpha w} + \overline{r}_{v\alpha w} + 1_{uv}) \tag{10}$$

$$\Pi_\alpha \Sigma_u \Sigma_v \Sigma_w \ (c_\alpha + r_{u\alpha v}\ r_{u\alpha w}\ \overline{1}_{vw} + r_{u\alpha w}\ r_{v\alpha w}\ \overline{1}_{uv}). \tag{11}$$

La primera fórmula expresará –en lenguaje moderno– que si las imágenes de u son v y w, entonces v se confunde con w. La segunda expresará que si u y v tienen la misma imagen w, entonces $u = v$, mientras que la tercera fórmula resume las dos condiciones precedentes. Ahora bien decir que el número de objetos de una clase a es al menos tan grande como el de los objetos de una clase b se reduce a escribir que:

$$\Sigma_\alpha \Pi_i \Sigma_j \ c_\alpha \ (\overline{a_i} + b_j \ r_{j\alpha i}) \tag{12}$$

es decir que hay una correspondencia biunívoca α tal que, ahora todo i en a, hay un j en b tal que j está en correspondencia biunívoca con i. Así a debe contener al menos tantos elementos como b.[4] Se ve que no estamos muy alejados de la idea russelliana según la cual el número cardinal de una clase es la clase de todas las clases equipotentes entre sí.

Se comprende el interés particular que PEIRCE parece otorgar, al final de su vida, a esta lógica de *"segunda intención"*: *"La lógica de segunda intención que también llamó Lógica Objetiva representa con mucho la parte más amplia de la lógica formal. Esta parte es también la más seductora y la más cautivadora e incomparablemente la más profunda"* (C.P. 4.80). Estas palabras provocan que se lamente todavía más que PEIRCE no haya desarrollado más tal lógica. Sin embargo, en el marco de sus investigaciones gráficas, PEIRCE vuelve a usar la noción de la "segunda intención" ampliándola y desarrollándola. Esto es lo que querríamos mostrar por medio del examen de un primer aspecto del sistema gamma de los gráficos existenciales.

---

[4] En 1897 PEIRCE vuelve sobre esta misma idea, lo cual, por cierto, le conduce a ilustrar el resultado de Cantor $2^n > n$ (Cf. C.P. 3.547 ss.).

1.2. La formulación gráfica

El término de *"segunda intención"*, tomado de la lógica escolástica, a la cual PEIRCE hace referencia expresa (Cf. C.P. 4.465), parece abarcar, en gamma, todo un conjunto de investigaciones orientadas a una extensión del cálculo de predicados de 1 ^{er} orden y al establecimiento de las formulaciones lógicas, que hoy llamaríamos metalingüísticas y que dan testimonio de una primera aparición en PEIRCE del problema de la formalización –por medio de gráficos– de la metamatemática.

Este aspecto metalingüístico de las nuevas investigaciones de PEIRCE está subrayado de forma especial en C.P. 4.465: *"... la lógica de segunda intención es un discurso sobre el discurso como símbolo"*. Por ella *"pensamos el signo-pensamiento mismo y hacemos de él el objeto de otro signo-pensamiento*[5] *"* (C.P. 4.549). En el mismo pasaje, PEIRCE indica el lazo existente entre sus estudios sobre los predicados de orden superior a 1 y sus investigaciones metalingüísticas: *"Dedicaré ahora algunas palabras a lo que usted ha llamado las Categorías, pero que yo prefiero llamar Predicamentos y que usted ha descrito como predicados de predicados. Esta admirable operación de abstracción hipostática, que nos permite, al parecer, crear unos* entia rationis, *los cuales no obstante a veces son reales, nos proporciona el medio de transformar los predicados de tal manera que unos signos-pensamiento o signos por medio de los cuales pensamos, se convierten en sujetos de pensamiento"* (C.P. ibid.). PEIRCE presenta claramente su nueva lógica gráfica como una prolongación de las partes alfa y beta de los gráficos existenciales: *"La parte alfa de los gráficos... no es susceptible de presentar más que los razonamientos que hacen referencia a las relaciones lógicas de los términos generales. La parte beta... permite manejar con comodidad y rapidez razonamientos de naturaleza muy compleja, y también proposiciones que el lenguaje ordinario no puede expresar si no es por medio de largos y confusos circunloquios... Sus razonamientos se refieren generalmente a las propiedades de las relaciones de objetos individuales entre sí. Pero no tiene nada que hacer con muchas ideas que nos son perfectamente familiares. En líneas generales, es incapaz de razonar sobre abstracciones. No puede razonar, por ejemplo, sobre cualidades, ni sobre relaciones como sujetos de razonamientos. No puede razonar sobre ideas. La parte gamma ha sido inventada con la finalidad de suplir esta insuficiencia"* (C.P. 4.510-511). Pero gamma no tiene como meta exclusiva razonar sobre predicados sino también sobre los gráficos mismos: *"Paso ahora a otra sección totalmente indispensable de los gráficos gamma. Dicho de otra manera, es necesario poder razonar con gráficos acerca de gráficos"* (C.P. 4.527). La necesidad de nuevos tipos de gráficos aparece aquí claramente: *"... un razonamiento sobre gráficos consistirá necesariamente en mostrar que cierta cosa es verdadera de todo posible gráfico que responda a una descripción general. Pero no podemos representar todo gráfico posible que responda a una descripción general cualquiera y, por consiguiente, si debemos*

[5] En Ms. 450 PEIRCE escribe que: "La esencia del razonamiento matemático... reside en la operación de *abstracción*, por medio de la cual pensamos o consideramos el pensamiento en sí mismo y hacemos de él objeto del pensamiento."

razonar con gráficos, nos hará falta un gráfico que encierre una definición general de la especie de gráfico a la cual el razonamiento debe referirse" (C.P. ibid.).

Los objetos de gamma –que PEIRCE a menudo llama *"abstracciones"* o *"entia rationis"*– requieren, para ser expresados, un gran número de signos nuevos (cf. C.P. 4.512). Estos últimos no son sin embargo de una especie esencialmente diferente de la de los signos Alfa y Beta (cf. C.P. ibid.). De esta manera nos volvemos a encontrar los tres tipos de signos de Alfa (hoja de aserción, cortadura, gráfico) y los dos nuevos tipos introducidos en Beta (lugar predicativo y L.I.). Pero estos signos se presentan en Gamma bajo nuevas formas de las cuales, de aquí en adelante, necesitaremos pasar revista.

1.21. Expresión gamma de los gráficos alfa y beta

La expresión de los gráficos alfa requiere los siguientes signos (cf. C.P. 4.528 y nota de 529):

X——— A	*"X es la hoja de aserción"* Se ve aquí que *"X"* sirve para nombrar al individuo denotado por la línea de identidad. Hablando con todo rigor debería leerse: "existe algo –a saber: X– que es la hoja de aserción."
X———γ	*"X es una aparición de un gráfico"*[6]
X———k	*"X es un área cerrada"* (para esta noción cf. cap. 1, n. 116)
X——— ϵ ———Y	*"X es la superficie del área cerrada Y"* (C.P. 4.529)
Y——— k ———X	*"X es el "área" de la cortadura Y"* (C.P. 4.528)[7]
X———(———Y	*"X está inscrito sobre Y"*
Y———)———X	
X———μ	*"X es un vacío"* (la hoja de aserción o parte de la hoja de aserción sin un gráfico inscrito sobre ella)
X———(V)	*"X es un gráfico que expresa V".*

[6] En una nota de C.P. 4.529 PEIRCE introduce, a propósito de las veces en que aparece un gráfico, otros dos símbolos:

$X - \delta - Y$ "la aparición de un gráfico designado por medio de X contiene como parte suya la aparición de Y".

$X - \zeta - Y$ "X es una aparición del mismo gráfico del cual Y es una aparición, o bien es equilente a Y".

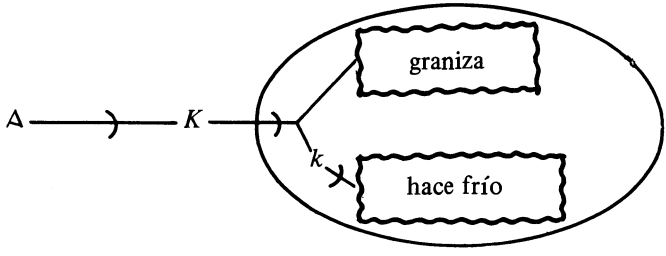
[7] De hecho la figura precedente debería traducirse por: $X - \epsilon - Y - k$. Sin duda hubiera sido preferible, para no confundir el área cerrada y el área, utilizar una letra distinta de k en $Y - k - X$. Por otra parte hubiera sido más coherente seguir expresando la noción de superficie por medio del símbolo ϵ. Sin duda, la nota de C.P. 4.529 no es de la misma época que C.P. 4.528.

PEIRCE lo comenta con estas palabras: *"Es necesario colocar V en el dentado (saw-rim) –designo de esta manera la línea que la rodea– pues al hablar de esta manera de un signo* materialiter, *como se decía en la Edad Media, exigimos que tenga un gancho que no tiene"* (C.P. 4.528).

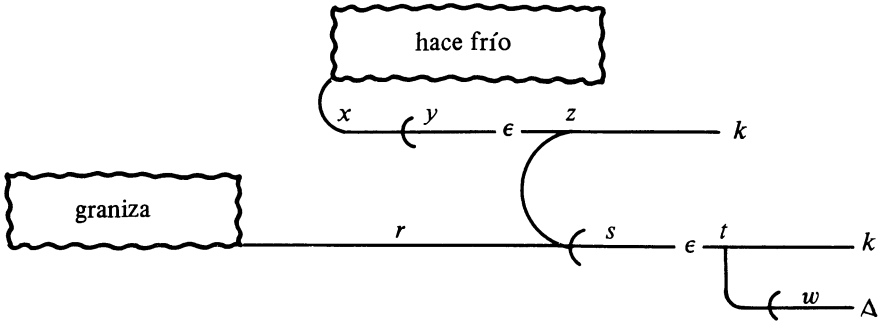
X——— σ ——— *Y* *"X conlleva Y como su gráfico entero"* (C.P. 4.529, nota)

En C.P. 4.528 PEIRCE ilustra el siguiente gráfico alfa:

diciendo que "si graniza, hace frío". El gráfico que afirma que este gráfico está inscrito sobre la hoja de aserción es representado de la siguiente manera por PEIRCE:

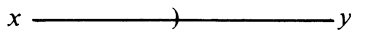


En realidad este gráfico no es correcto. Utilizando, para mayor comodidad, las variables *x, y, z, r, s, t, w*, sería necesario escribirlo:

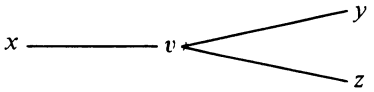


es decir: "Existen siete objetos *x, y, z, r, s, t, w,* tales que *x* es un gráfico que expresa que hace frío, *y* es la superficie de una área cerrada *z*, *r* es un gráfico que expresa que graniza, *s* es la superficie del área cerrada *t*, *w* es la hoja de aserción; y *x* está inscrito sobre la superficie *y* de un área cerrada *z*, mientras que *z* al igual que el gráfico *r* están inscritos sobre la superficie *s* de una nueva área cerrada *t* que está, ella misma, sobre la hoja de aserción *w*."

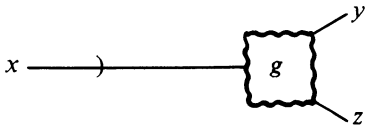
Los signos gamma utilizados para la expresión de los gráficos beta están dados en C.P. 4.529:



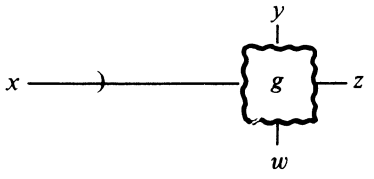
"y es una L.I. cuya parte más externa está sobre x"



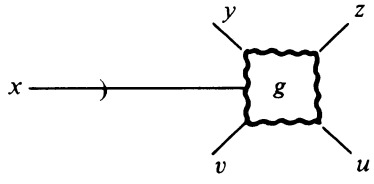
"x es una L.I. que tiene sus extremidades en y y z"



"g está expresado por un gráfico diádico sobre x, cuyo 1.er y segundo ganchos están unidos respectivamente a las L.I. y y z"



"g está expresado por un gráfico triádico sobre x, cuyos 1.er, 2.o y 3.er ganchos están unidos sobre x respectivamente a las líneas de identidad y, z, w"



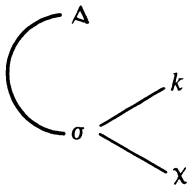
"g está expresado por un lugar predicativo tetrádico sobre x, cuyos ganchos del 1 al 4 están respectivamente unifos a y, z, u, v".

La nota de C.P. 4.529 introduce otros dos símbolos (tan utilizables para alfa como para beta):

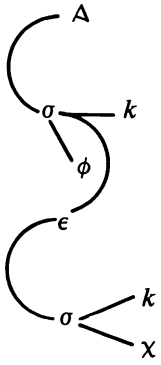
x ——— ϕ *"x es una autorización"*

x ——— χ *"x es un hecho"*

que ilustra de la siguiente manera:



"'Un área cerrada es el gráfico entero sobre la hoja de aserción en cuanto hecho" (C.P. 4.529 nota).

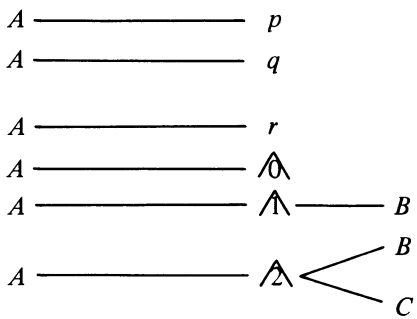


"Está permitido colocar sobre la hoja de aserción, en cuanto gráfico entero, un área cerrada sobre cuya superficie un área cerrada está situada en cuanto hecho" (C.P. ibid.).

No hemos encontrado, en las obras publicadas, ejemplos de expresión gamma de los gráficos beta.

1.22. Investigaciones sobre los predicados

Expondremos brevemente el sistema llamado de los *"Potenciales"* (*Potentials* C.P. 4.524), cuya formulación está por cierto muy cerca de la dada el mismo año en C.P. 4.409. Las convenciones son las siguientes:



significa que *"A es un individuo..."*

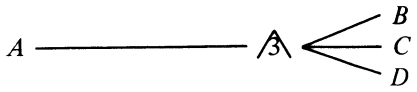
significa que *"A es un carácter o una cualidad monádica"*

significa que *"A es una relación diádica"*

significa que *"A es un gráfico"*

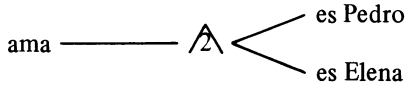
significa que *"B posee la cualidad A"*

significa que *"B mantiene la relación A con C"*



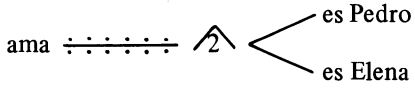
significa que *"B mantiene la relacion triádica A con C para D"*[8]

Debe señalarse que las L.I. a la derecha de los *"potenciales"* no se corresponden con las L.I. beta que se refieren a individuos. De esta manera resulta que, en el esquema siguiente:



que significa: "Existen dos individuos –Pedro y Elena– y una relación diádica "ama", tales que Pedro ama a Elena", las dos L.I. que están a la derecha de 2 denotan individuos mientras que la L.I. de la izquierda denota un predicado, es decir, en lenguaje peirciano, una *"abstracción"*[9]. Para distinguir estos dos tipos de L.I., PEIRCE considera a veces dos procedimientos. El primero consiste en sustituir una L.I. que representa una *"abstracción"* por una letra mayúscula llamada "selector" (*selective:* cf. C.P. 4.525), colocada a la derecha del *"potencial"*. La figura precedente se transformaría en:

En C.P. 4.526 PEIRCE utiliza este procedimiento, en una figura que, por cierto, es poco explícita y que es la única ilustración que proporciona PEIRCE de su sistema de los *"potenciales"*. El segundo procedimiento consiste en rodear de puntos la L.I. que representa una abstracción. La figura se convierte entonces en:



Este procedimiento es utilizado por PEIRCE en C.P. 4.470. Añadamos que ninguno de estos procedimientos es utilizado sistemáticamente.

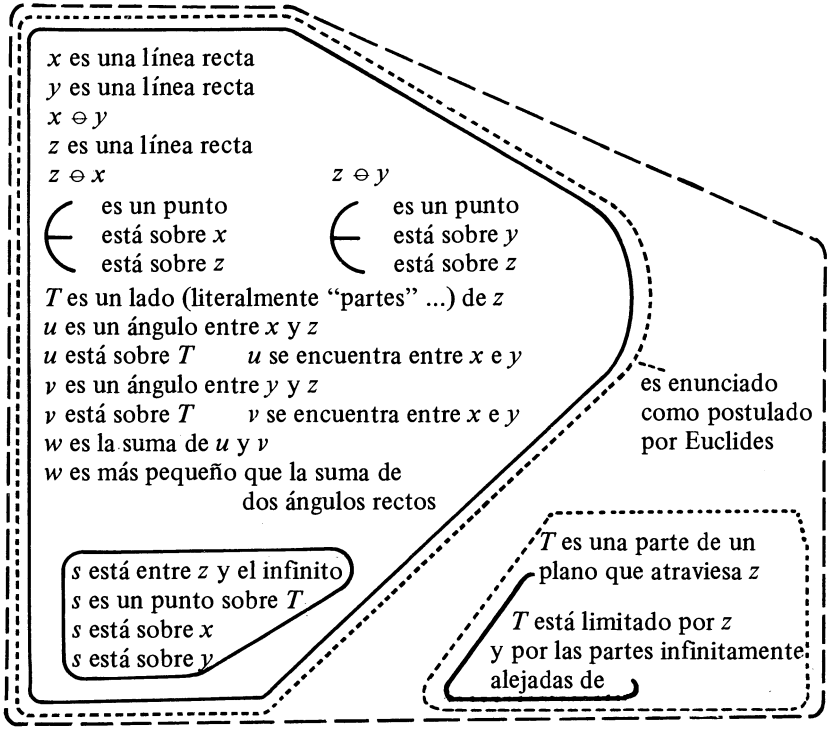
Antes de acabar el estudio de esta sección de gamma dedicado a la representación de las *"abstracciones"*, es necesario que digamos unas palabras sobre la cortadura punteada. En C.P. 4.471 PEIRCE escribe en efecto que: *"... todo gráfico del*

---

[8] PEIRCE se limita a los predicados triádicos. Pero recuérdese que, a su juicio, los predicados de grado superior pueden ser construidos a partir de estos últimos.

[9] Podría decirse lo mismo de las L.I. utilizadas en la expresión gamma de los gráficos alfa y beta que, por denotar gráficos, designan "abstracciones".

que deba hablarse... puede estar rodeado por una curva punteada con una línea punteada unida a esta curva" (Cf. también C.P. 4.474). Y nos provee en C.P. 4.471 del gráfico siguiente en el cual hemos corregido el error tipográfico ($\ominus z\, y$ se transforma en $z \ominus y$)[10] y hemos introducido la frase que falta ("es enunciado como postulado por Euclides"):



PEIRCE lo interpreta así: *"Puede leerse como sigue: "*EUCLIDES *enuncia como postulado el enunciado siguiente: sean dos rectas cortadas por una tercera. Si los ángulos así formados que se sitúan entre las dos primeras rectas... y en el mismo lado de la tercera son inferiores a dos ángulos rectos, entonces estas dos rectas volverán a encontrarse en este mismo lado. Por lado... de la tercera recta, debe entenderse en este enunciado la parte del plano que contiene esta tercera recta, parte limitada por esta recta y por las partes infinitamente alejadas del plano"...* (C.P. 4.471). Se ve en la figura de arriba que el gráfico global conlleva dos partes: una es el postulado afirmado por EUCLIDES (se trata del gráfico al que aboca una línea punteada), la otra indica la condición bajo la cual el postulado se cumple. Las cortaduras punteadas significan simplemente que su contenido está considerado como una *"abstracción"*.

[10] El signo ⊖ indica que las líneas rectas son distintas.

En los *Collected Papers* se encuentra una mención de otro modo de representación: el *borde ondulado* (*wavy rim:* C.P. 4.412). Pero PEIRCE no ofrece ninguna ilustración de su empleo. En conjunto, la parte de gamma dedicada a los gráficos de *"segunda intención"* deja la impresión de que no está acabada: basta considerar la multiplicidad de convenciones y la ausencia de reglas de utilización. A partir de 1903 PEIRCE parece abandonar esta vía de investigación para dedicarse, siempre en el marco de gamma, a un nuevo problema, aunque ligado, en un principio, a preocupaciones metateoréticas, razón por la cualtiene un lugar en el marco de gamma: el de la expresión gráfica de la modalidad.

2. LA LOGICA MODAL

A diferencia de las investigaciones precedentes no existe en PEIRCE ninguna formulación de tipo algebraico para la lógica modal. Bien es verdad que no hemos podido consultar las obras sin publicar del autor. Pero parece dudoso que puedan contener semejante formulación, pues las perspectivas en que se sitúa gamma parecen limitarse a una época en que PEIRCE había abandonado sus investigaciones sobre el álgebra lógica[11] para dedicarse totalmente a sus gráficos.

2.1. Las tentativas peircianas de expresión gráfica de la modalidad

Se encuentran en el libro IV de los *Collected Papers* diversos intentos de formulación gráfica de las modalidades. Estos ensayos, un tanto dispersos, nos parece que pueden agruparse en dos grandes categorías.

2.11 La primera podría caracterizarse por el papel que juega la hoja de aserción. PEIRCE imagina ante todo una manera de expresar las modalidades que consiste en utilizar un conjunto de hojas de aserción que representa los diferentes "universos" de que trata el discurso: *"... con el fin de representarnos mentalmente la relación entre el universo de las posibilidades y el universo de los hechos actualmente existentes, diremos que, si concebimos éste como una superficie, es necesario que concibamos aquél como un espacio de tres dimensiones, o una superficie cualquiera que represente todos los hechos que pudieran existir en un universo existencial"* (C.P. 4.514, extraído de las *Lowell Lectures* de 1903). Esta noción de un conjunto de "universos" distintos, que PEIRCE ha sacado quizás de las teorías medievales de la ampliatio[12], nos introduce aquí en el corazón mismo de la teoría peirciana de la

[11] Fuera de algunas páginas, consagradas a la lógica trivalente, que han sido estudiadas en el primer capítulo.

[12] Esta teoría que conlleva un notable ensanchamiento de la noción de *suppositio* aparece en diversos tratados medievales dedicados a las propiedades de los términos. En especial se encuentra en las obras de W. SYRESWOOD, PEDRO de ESPAÑA, BURLEIGH, ALBERTO de SAJONIA y OCKHAM. Por medio de la *ampliatio*, la *suppositio* de un término se extiende a la significación, no sólo del presente, sino también del pasado, del futuro y de lo posible. La *ampliatio* nos introduce pues en el seno de una lógica modal, cosa que muestran de manera especial

modalidad. PEIRCE distingue a menudo la lógica modal de las otras ramas de la lógica por el hecho de que nos introduce en "universos" distintos procedentes del universo de las cosas existentes, de manera que las teorías del cálculo de predicados de 2.º orden pueden ser, en cierta manera, tenidas por modales[13]. Se ve aquí que la noción de modalidad rebasa la noción de tiempo, y en especial la de futuro. Bien es verdad que PEIRCE a veces parece limitarse a una concepción temporal de la modalidad: lo posible es lo que, en un estado de información dado, no se sabe que es falso y un estudio completo de la modalidad debe entonces explicar las consecuencias de todo cambio en un estado de información presupuesto (cf. C.P. 4.518-522). La modalidad aparece entonces como un intento de someter el tiempo a la lógica: *"Los lógicos han considerado generalmente que el tiempo es un sujeto "extra lógico", según la expresión usual. Nunca he compartido esta opinión"* (C.P. 4.523), escribe PEIRCE en un pasaje que sigue a una discusión sobre la noción de posible. Pero PEIRCE parece a veces darse cuenta de que el dominio de la modalidad no se reduce al de las distinciones temporales. Así, observa que hay posibilidades y necesidades que son independientes de la noción de estado de información (cf. C.P. 5.453 ss. y 6.367). En C.P. 6.318 PEIRCE, al parecer, trata de precisar su pensamiento señalando que *"el único universo lógico, al que pertenecen todos los correlatos de una relación existencial, está en definitiva compuesto por unidades-sujetos"*. Es evidente que no podría suceder lo mismo para los universos de una lógica modal. En un escrito de 1897, PEIRCE describe de la siguiente manera la diferencia: *"Que los individuos o las unidades que constituyen un conjunto tengan o no una identidad distinta y propia para cada uno de ellos depende de la naturaleza del universo del discurso... Digo por consiguiente que mientras el discurso remita a un objetivo común y a una experiencia acabada, estas unidades conservarán cada una de ellas su identidad distinta. Si hablamos, usted y yo, de los grandes trágicos que ha habido en Nueva York durante estos diez últimos años, es posible establecer una lista exacta de ellos, citando individualmente sus nombres. Pero imagine que se aborde la cuestión de saber en qué medida las influencias generales del mundo del teatro favorecen actualmente las carreras femeninas más que las carreras masculinas. Para discutir de este problema, necesitamos ir más allá de nuestra experiencia finita... y necesitamos considerar los actores posibles o probables que reserva el futuro inmediato. Ya no nos es posible asignar a cada uno un nombre. Estos actores-individuos a los cuales se refiere ahora nuestro discurso son casi totalmente absorbidos por especies generales: y su identidad propia se pierde en parte"* (C.P. 4.172). Se ve aquí que el interés de PEIRCE, aunque todavía unido al tiempo, se ha desplazado un poco. Como hace notar en C.P. 4.172: *"Lo posible es necesariamente general; y ningún grado de especificación general puede reducir una clase general de posibles a un caso individual"*. La modalidad se introduce entonces en el corazón del mundo real, en la medida en

---

las reglas 7, 8 y 9 de ALBERTO de SAJONIA, *Logica Albertucii Perutilis Logica* (Venecia: 1522).

[13] Cf. C.P. 3.573-574: Cf. también 3.606-608; 4.431, 514, 546, 552 n., 553n.

que éste conlleva, tal como PEIRCE parece pensarlo[14], un grado de indeterminación.

En 1906, PEIRCE vuelve a la idea de una simbolización de los diversos universos por medio de la hoja de aserción, sea utilizando hojas de aserción de colores diversos para distinguir los universos (cf. C.P. 4.553), sea no utilizando más que una sola hoja en la cual se distingan dos lados: el anverso, donde se representan los hechos reales y el reverso que representa, según sus colores, las *"diversas especies de posibilidad"* (C.P. 4.573). En este último caso, los colores pueden emplearse de dos maneras: si se colorea toda una superficie dada, indican la modalidad que va unida a la proposición inscrita sobre esta superficie; si se utilizan sobre los bordes de la superficie, sirven para indicar si la proposición inscrita sobre la superficie debe entenderse de manera interrogativa (PEIRCE utiliza aquí los colores[15] de los esmaltes), imperativa (colores de las pieles) o indicativa (colores de los metales). Fácilmente se adivina lo embarazoso que debería resultar tal sistema, que por cierto no parece haber utilizado nunca y que en 1913, si se da crédito a una carta dirigida a F.A. WOOD[16], parece que incluso la rechaza por "absurda". En una carta dirigida a D. RISTEEN en 1911, PEIRCE habla de una parte Delta[17], de los gráficos existenciales que debía tratar de la modalidad, pero no la describe. De seguro que este nuevo sistema debía en parte estar destinado a sustituir la expresión "heráldica" un tanto delirante de la modalidad.

2.12. Pero paralelamente a este primer tipo de investigaciones, parece que PEIRCE exploró una segunda vía cuyo interés quisiéramos mostrar aquí: *"Mientras me esforzaba por empezar la construcción de la parte gamma del sistema de los gráficos existenciales, me vi obligado a elegir, entre la enorme masa de las ideas sugeridas de esta manera, para retener un pequeño número de ellas que fuera fácilmente explotable. Me ha parecido cómodo ceñirme a la utilización de una sola hoja de lo real a la vez; pero ha resultado que eran necesarias varias especies diferentes de cortaduras"* (C.P. 4.514). PEIRCE imagina entonces una nueva cortadura: la cortadura punteada (broken cut: C.P. 4.515). Esta última no es sino la cortadura punteada que se ha estudiado con anterioridad, pero que recibe aquí una nueva interpretación. Se recordará que la cortadura alfa negaba el gráfico contenido en ella. Así el gráfico

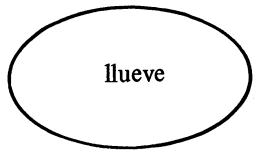
---

[14] "Puede ciertamente concebirse que este mundo que llamamos mundo real no es perfectamente real, sino que existen cosas semejantemente indeterminadas. No podemos estar seguros de que no es así" (C.P. 4.61).

[15] En C.P. 4.553 PEIRCE hace las precisiones siguientes: "Los colores de los esmaltes son: azul, gules, sinople y púrpura. Los de las pieles: sable, armiño, vero y potenzado. Los de los metales: plata, hierro y plomo". Es de notar aquí el carácter muy aproximado de los conocimientos peircianos de heráldica: "sable no se aplica más que a los esmaltes, hierro y plomo no son considerados metales y potenzado ("potent") no es un color heráldico.

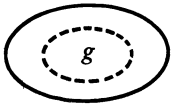
[16] Carta escrita en octubre y noviembre de 1913 (Cf. C.P. 8, p. 298).

[17] "Ahora me resultará necesario añadir una parte Delta para tratar de la Modalidad" (Ms. 500).

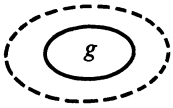


significaba: "no llueve". A la cortadura punteada se le da un sentido muy diferente que PEIRCE explicita en C.P. 4.515: *"Empezaré por una de las cortaduras gamma. La llamo la cortadura punteada y la represento así:*

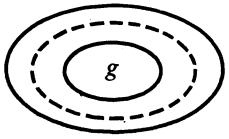
Este diagrama no afirma que no llueve. Afirma solamente que las reglas alfa y beta no me obligan a admitir que llueve o, lo que viene a ser igual, que una persona cuya información se constriñera al conocimiento profundo de una lógica reducida a las partes alfa y beta de los gráficos existenciales no sabría que llueve". La cortadura punteada indicará pues que *"el gráfico entero sobre su superficie es lógicamente contingente (no necesario)"* (C.P. 4.410). El gráfico precedente puede entonces interpretarse como *"Es posible que no llueva"*. En C.P. 4.516 PEIRCE ofrece los gráficos siguientes con sus interpretaciones:



"*g* es... necesariamente verdadero"



"es... posible que *g* sea verdadero"



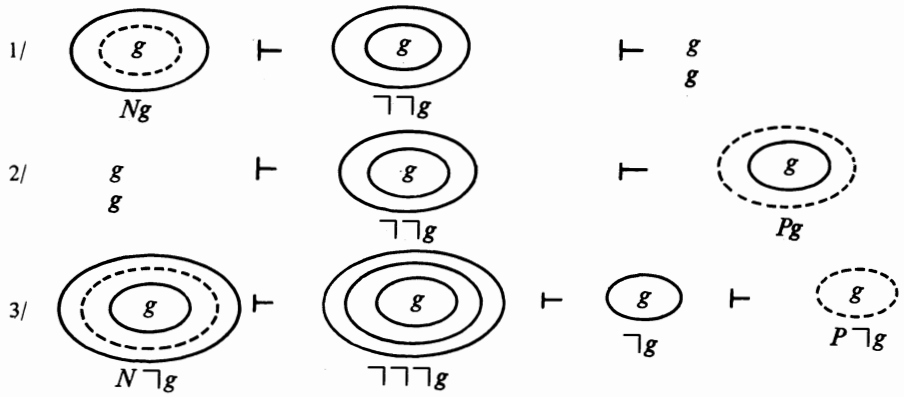
"es... imposible que *g* sea verdadero"

En el mismo parágrafo PEIRCE introduce seguidamente dos reglas de deducción:

Regla 1: *"En una cortadura punteada que está situada sobre la hoja de aserción se puede inscribir un gráfico cualquiera."*

Regla 2: *"Una cortadura alfa redeada de un número par*[18] *de cortaduras puede ser medio borrada para transformarse en una cortadura punteada. Una cortadura punteada rodeada de un número impar de cortaduras puede completarse para convertirse en una cortadura alfa"*[19].

Y, en el mismo pasaje, PEIRCE construye, a título de ilustración de la 2.ª regla, las derivaciones siguientes: (donde *N* representa la necesidad y *P* la posibilidad).



En C.P. 4.516-522 PEIRCE introduce un signo especial –una barra vertical– para distinguir el *"estado particular de información"* (C.P. 4.518) al cual debe hacerce referencia para la comprensión de los enunciados de modalidad. La figura

$$g$$

que correspondía a la *"simple aserción de g"* (C.P. 4.516) se convierte entonces en

$$\overset{g}{|}$$

que es glosada en C.P. 4.520: *"Hay un estado concebible de información tal que nosotros sabemos*[20] *que g es verdadera"*. Es necesario observar que PEIRCE utiliza aquí las mismas convenciones del sistema Beta de los gráficos existenciales[21]. La re-

[18] Debe añadirse: o nulo.

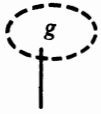
[19] PEIRCE añade que es indiferente que la cortadura por transformar esté rodeada de cortaduras alfa o beta, pues sólo cuenta el número de cortaduras que la rodean.

[20] En C.P. 4.518 PEIRCE utiliza también el verbo "aprender".

[21] Recordemos que, en este sistema, la proporción existencial $(\exists x) A (x)$ está representada

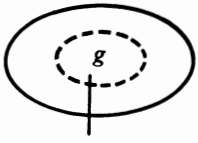
ferencia peirciana al sistema Beta no es dudosa si se observa que, de entrada, los *"estados de información"* son asimilados a *"objetos individuales"* (C.P. 4.518) y que PEIRCE emplea en C.P. 4.521 el término mismo de *"ligadura"*, llegando incluso a precisar que esta noción de ligadura cumple *"todas las reglas de las otras ligaduras"* (C.P. ibid.)[22]. En estas condiciones el gráfico

que significaba $P \neg g$ y que es glosado así: *"Hay un estado posible de información tal que no estamos en condiciones de saber que el gráfico g es verdadero"* (C.P. 4.520) se corresponde con el gráfico

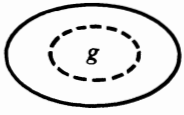


Es claro, pues, como PEIRCE lo hace notar, que el gráfico

es equivalente al gráfico



que PEIRCE comenta en estos términos: *"Hay un estado concebible de información tal que sería falso que, en este estado, no estemos en condiciones de saber que g es verdadero"* (C.P. 4.520). El gráfico

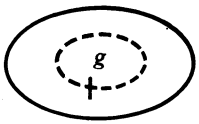


que significaba *Ng* puede entonces representarse bajo la forma:

---

por la figura $\_A$ donde la línea que precede al predicado *A* se llama "línea de identidad" (C.P. 4.406) o "ligadura" (C.P. 4.407). Las figuras $(\_A)$ y $\_(A)$ representarían entonces respectivamente $\neg (\exists x) A(x)$ y $(\exists x) \neg A(x)$.

[22] Es de notar que desde el principio del artículo, antes incluso de la introducción de las convenciones Beta, PEIRCE hablaba de beta-modalidades (beta-necesidad y beta-posibilidad en C.P. 4.516).



que corresponde al siguiente comentario que hace PEIRCE del gráfico precedente de la necesidad: *"Es falso que exista un estado de información tal que no estemos en condiciones de saber que el gráfico g es verdadero"* (cf. C.P. 4.520). En esta perspectiva PEIRCE introduce en C.P. 4.518 la regla

que no comenta, pero que podría traducirse conforme a lo que precede: si existe un estado de información tal que sepamos que *g* es verdadero, entonces es falso que exista un estado de información tal que no estemos en condiciones de saber que *g* es verdadero[23]. La comprensión de esta inferencia nos obliga por un lado a interpretar la doble ligadura de la consecuencia, por otro, a precisar la semántica que se oculta bajo la noción de "estado de información" utilizada en el enunciado peirciano de la regla.

2.2. Una lógica de los mundos posibles

A primera vista, la noción de estado de información puede hacer pensar en la existencia de una relación entre concepción de los mundos y concepción de la inferencia probabilitaria. De hecho, en el contexto del artículo en cuestión, la noción de estado de información, tal como PEIRCE la utiliza, nos parece que debería ser interpretada desde una perspectiva completamente nueva. La descripción del sistema de la cortadura punteada resulta, en efecto, que sigue a un pasaje (Cf. C.P. 4.512) en que PEIRCE subraya, como ya se ha visto, que la originalidad de la parte modal del sistema Gamma de los gráficos existenciales consiste en sustituir la hoja de aserción única de los sistemas Alfa y Beta por un "libro" de estas hojas: si la hoja de Alfa y Beta representa el mundo de la existencia real[24], cada una de las hojas en Gamma representa un mundo posible (uno de los cuales es el mundo real). El sistema Gamma puede entonces aparecer como un intento de establecer la lógica de los "mundos posibles", en el mismo sentido en que este término es utilizado en el estu-

[23] Lo cual se reduce, para PEIRCE, a afirmar la necesidad de *g*, como acaba de verse.

[24] Cada fórmula escrita sobre esta hoja se corresponde con un enunciado verdadero en este mundo.

dio contemporáneo de las semánticas modales. En 1957 PRIOR, en su sistema diodoreano, define la posibilidad y la necesidad por referencia a los instantes futuros del tiempo: un instante de tiempo puede fácilmente construirse como un mundo posible y de esta manera el sistema de PRIOR aparece como una lógica de los mundos posibles pero conforme al espíritu peirciano. En 1959 la descripción kripkeana se aproxima, mucho más que lo hizo PRIOR, a la de PEIRCE. Los elementos de un modelo de estilo kripkeano y sus relaciones son definidas de manera abstracta, pero un acercamiento intuitivo a estos últimos se logrará admitiendo un universo, o conjunto de mundos posibles, relacionados unos con otros, y una función que otorga una asignación de valor (verdadero o falso) a cada uno de los enunciados de cada mundo, asignación que obedece, para cada fórmula carente de funtor modal, a las leyes ordinarias del cálculo de proposiciones. Sin embargo, para toda fórmula α precedida de un operador modal, la asignación de valor deberá tener en cuenta el estatuto semántico de la proposición α en los otros mundos del universo en relación con el mundo en el que se hace la evaluación en cuestión. Un acercamiento intuitivo a la relación entre los dos mundos consistirá en hablar de relación de accesibilidad. Una descripción de esta relación podría, por ejemplo, consistir en imaginar una máquina que calculara, en un mundo *M1*, el valor de una fórmula que posea uno o varios operadores modales teniendo en cuenta, no sólo la información que pueda tener sobre el mundo en cuestión (caso en el cual la relación de accesibilidad se llama reflexiva: *M1* tiene acceso a *M1*) sino también la información extraída en otros mundos en que se encuentran máquinas que efectúan las mismas operaciones y que están unidas a la primera (mundos de los que en tal caso se dice que son accesibles a *M1*). La relación de accesibilidad, reflexiva a menudo, puede tener también otras propiedades (como la transitividad, la simetría). Si se modifican las propiedades de la relación de accesibilidad se pueden en tal caso construir modelos para todo un conjunto de sistemas modales diferentes.

La descripción kripkeana se sitúa claramente en la prolongación de la de PEIRCE. Como se ha visto, PEIRCE trata, al menos en algunos de sus artículos, de formular la lógica de los mundos posibles asociando a cada mundo posible una hoja de aserción sobre la cual pueden efectuarse los cálculos lógicos para este mundo. Por otra parte PEIRCE nota que las diferentes hojas están unidas entre sí (cf. C.P. 4.512), pero nunca trata específicamente de las propiedades de estas relaciones. Lo mismo sucede en los textos en que PEIRCE se conforma con no utilizar una sola hoja de aserción. En estos últimos es donde se ha introducido la noción de "estado de información"; pero es necesario confesar que esta última es presentada de manera poco explícita, como lo atestigua el pasaje siguiente, en que esta noción aparece por primera vez en un contexto modal: *"Debe recordarse que la posibilidad y la necesidad son relativas al estado de información. Supongamos que con relación a cierto gráfico yo esté en un estado de información tal que el gráfico pueda ser verdadero o falso: es decir que puedo escribir sobre la hoja de aserción*[25]*:*

[25] Bajo los gráficos de PEIRCE escribimos aquí su traducción al lenguaje moderno (salvo para el último).

Pg

P ¬g

Pero he aquí que me entero de que es verdadero. Ello me autoriza a escribir sobre la hoja[26]

Pg

P ¬g

Pero, en relación con este nuevo estado de información, P ¬g = v deja de ser verdadero; y por tanto en relación al nuevo estado de información puede escribirse

Ng

"(C.P. 4.517)

Este texto parece admitir ante todo la existencia de dos familias de evaluación, la primera de las cuales se caracteriza por la coexistencia de dos valores distintos para *g* (*v* y *f*), la segunda por la exclusión del valor *g* = *f*. Si en la perspectiva, esbozada más arriba, de una lógica de los mundos posibles, se asocia a cada evaluación un mundo y si se interpreta la noción de "estado de información" por medio de la noción de "conjunto de mundos", el primer estado de información descrito por PEIRce parece caracterizarse por la presencia de un mundo en que *g* es verdadero y de otro mundo en que *g* es falso, mientras que el segundo estado de información se caracteriza por el hecho de que, en todos sus mundos, *g* es verdadero. De la verdad de *g* en todos los mundos PEIRCE extrae por tanto la verdad de la necesidad de *g*. Pero con ello se ve que queda aclarada la inferencia de C.P. 4.518, introducida más arriba, y que podría traducirse de la siguiente manera: si existe un estado de información *i* (o conjunto de mundos) en el cual sabemos que *g* es verdadero, entonces es falso que exista un estado de información *i'* (subconjunto del primero[27]) en el cual no estemos en condiciones de saber que *g* es verdadero. Con lo cual se viene a decir que si *g* es verdadero en un conjunto de mundos entonces es verdadero en cada mundo[28]

[26] PEIRCE escribe a la derecha el gráfico *g*, pero debería escribir el gráfico *g* tal como lo exige, según se ha visto, la expresión "aprendo que *g* es verdadero".

[27] De ahí la justificación de una ligadura diferente de la primera en la parte derecha de la inferencia de C.P. 4.518.

[28] Se ve que la noción de mundo aparece aquí como el estado de información reducido a un elemento.

de este conjunto. En otras palabras, PEIRCE nos ofrece aquí una definición de la verdad en un estado de información (o conjunto de mundos) como la verdad en cada sub-estado de información (o subconjunto de mundos).

Si en C.P. 4.517 –y, como ya se ha visto, en C.P. 4.518– PEIRCE asimila la verdad de *g* en todos los mundos a la necesidad de *g*, con facilidad se ve que esta última no puede afirmarse más que en un mundo, que en este caso es aquél en que se encuentra el intérprete. De ahí la necesidad de concebir la noción de estado de información, no sólo como un conjunto de mundos, sino más precisamente como un conjunto de mundos unidos a un mundo, el del intérprete, en el cual se encuentra dada la necesidad de *g*. Lo cual viene a ser igual que postular la idea de una relación entre los mundos –conforme a la intuición peirciana de una unión entre los mundos de las hojas de aserción. Además la noción peirciana de "estado de información" parece en efecto conllevar intuitivamente la idea de una especie de "accesibilidad" entre los mundos, al menos en la medida en que cada estado de información es descrito como estado de información (de conocimiento) *acerca* de los mundos en los cuales se efectúan las evaluaciones. Si PEIRCE hubiera definido las propiedades de tal relación habríamos tenido la noción kripkeana de modelo. La gran novedad del análisis de Kripke en efecto consistirá en ofrecer una descripción formal de la relación de accesibilidad y en estudiar las consecuencias que de ella se derivan para la definición semántica de las fórmulas.

Esta interpretación de la noción de "estado de información" como estado en que el pensamiento "hace experimentos" acerca de los mundos posibles nos parece que está en la misma línea que las concepciones pragmatistas de PEIRCE. Es más, este último, en 1903 es decir, en el mismo año en que construía su sistema Gamma, definía el término de "información" como sinónimo del término "Experiencia" (cf. 1.537). Pero quizás donde encontremos los elementos que nos permitan comprender mejor el sentido que PEIRCE podía dar a tal experimentación es en la teoría peirciana de la semiótica. Un signo o "representamen" es *"una cosa unida a un segundo signo, su "objeto"... de tal manera que ponga en relación una tercera cosa, su "interpretante" con este mismo objeto, y esto de manera que ponga una tercera cosa en relación con este objeto... y así hasta el infinito"* (C.P. 2.92). En otra presentación del tema PEIRCE escribe que el signo "crea" en el espíritu del intérprete el interpretante y que significa el objeto *"no bajo todas las relaciones, sino por referencia a una especie de idea... llamada el "ground" del representamen"* (C.P. 2.228). Todo signo está pues *"unido a tres cosas, el ground, el objeto y el interpretante"* (C.P. 2.229). La noción de "ground" de un signo es una noción difícil de analizar en la obra de PEIRCE y sin duda resultaría arriesgado asimilar el "ground" de C.P. 2.228 (escrito en 1897) al de 1867[29]. Podemos hacernos una idea del sentido en que usa PEIRCE la palabra "ground", en el pasaje anteriormente citado, señalando que en C.P. 2.229 PEIRCE escribe que una de las consecuencias de la tripartición entre "ground", objeto e interpretante es la existencia de tres ramas en la se-

[29] Cf. "On a new list of categories", C.P. 1.551.

miótica: la *"gramática pura"* que *"expone lo que debe ser verdadero del representamen utilizado por una inteligencia científica cualquiera para que pueda encarnar un sentido"*, la *"lógica propiamente dicha"* que se corresponde con las condiciones requeridas por los representamina para que puedan *"ser valederos para un objeto cualquiera, es decir para que puedan ser verdaderos"*, finalmente la *"retórica pura"* que estudia *"las leyes por las cuales, en una inteligencia científica cualquiera, un signo origina otro signo, y especialmente un pensamiento origina otro"*. Resulta por tanto que la rama de la semiótica que se corresponde con el "ground" es la gramática pura o especulativa que estudia la manera en que el signo designa el objeto y las reglas de esta designación. Bajo esta relación se notará que, en el análisis que hace MORRIS de las "dimensiones de la semiótica"[30] se encuentran las dimensiones sintáctica, semántica y pragmática asociadas respectivamente al "vehículo del signo", al objeto y al interpretante. Sin por ello querer asimilar totalmente el "ground" al "vehículo del signo" de MORRIS, se puede concluir que los dos están estrechamente relacionados[31].

La noción de interpretante detendrá de manera más particular nuestra atención, pues en su nivel es donde aparece, al menos eso creemos, un análisis en términos de "mundos posibles". El término "interpretante" se refiere a los "efectos" (C.P. 5.475) producidos en el intérprete por un signo. Sin que deseemos entrar en el análisis de estos efectos diversos[32] diremos que los interpretantes aparecen en PEIRCE bajo dos formas principales: por una parte como evocaciones, discursos, glosas sobre el signo en su relación con el objeto[33] y por esta razón ellos mismos son signos y por tanto están involucrados en un proceso de creación abierto al infinito (pues estos signos en cuanto signos tendrán por ende interpretantes), por otra parte como interpretantes no reductibles a signos, interpretantes sin interpretantes, que PEIRCE analiza en su teoría del interpretante "final" o "último" descrito como "hábito de acción" (cf. C.P. 5.486-491)[34]. No examinaremos en este artículo los problemas que puede suscitar la teoría de un interpretante final que no es signo. Si considera-

---

[30] C.H. MORRIS, *Foundations of the theory of signs*, Chicago, 1938, pp. 6 ss.

[31] Nos parece que un análisis en términos fregeanos viene sugerido por el siguiente pasaje de C.P. 5.323: "... dos signos que no difieren más que en su *manera de representar su objeto*, pero que son equivalentes en cuanto al sentido, siempre pueden substituirse el uno al otro" (el subrayado es nuestro). Parece claro que la "manner of representing" el objeto está cerca del "art des gegebenseins" de Frege. La única diferencia que quizás podría hacerse es que en Frege el "art des gegebenseins" se refiere al objeto, mientras que en PEIRCE hace más bien referencia a la expresión. Por consiguiente, quizás podría decirse que el "ground" de un signo es el conjunto de todos sus modos posibles de representación de un objeto.

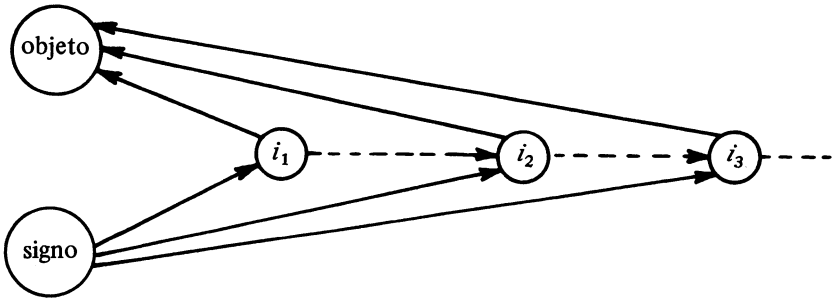
[32] Cf. especialmente C.P. 5.475-476-491.

[33] Sería más bien necesario hablar de "estructura objeto": como observa PEIRCE, el objeto del signo es, él mismo, "signo", en cuanto que es un objeto designado en relación a otros objetos.

[34] Es evidente que si la costumbre fuera de la misma naturaleza que el signo, tendría un interpretante y por tanto no podría ser considerado como "interpretante final". Añadamos que, a juicio de PEIRCE, incluso las lenguas formales tienen aquí un interpretante que, en cuanto que no es un signo, no se reduce a la estructura-objeto a la que apunta el signo. Una concepción que haga del signo lógico o matemático un signo sin interpretante no sería, por esta razón (más adelante veremos otra), aceptada por PEIRCE.

mos solamente los interpretantes de la primera categoría, observamos que estos signos, creados en el espíritu por el signo original, nos son presentados por PEIRCE bajo dos formas: signos "equivalentes" a los signos originales y signos "más desarrollados" que los signos originales (cf. C.P. 2.228). Si el "desarrollo" de los segundos puede explicarse en particular por el hecho de que hacen intervenir una experiencia exterior al lenguaje, el caso de las primeras parece más difícil de aprehender. La oposición que establece PEIRCE entre estos dos tipos de interpretantes nos lleva a pensar que concebía interpretantes en relación a una experiencia puramente lingüística, según nos permite pensar la expresión de "signo equivalente a un signo". Creemos pues que una teoría peirciana del interpretante debería incluir, por ejemplo, algunos aspectos de las teorías formales que permiten interpretar una teoría formal dada. Además, esto nos parece que está realizado en la noción moderna de "pragmática" tal como la define, por ejemplo, Richard MONTAGUE[35].

Vemos que el análisis del interpretante ocupa un lugar central en la descripción peirciana de la relación de signo: es a la vez una etapa necesaria para la unión signo-objeto y, al mismo tiempo, encrucijada en cuanto punto de partida de interpretantes, cada uno más sofisticado que el anterior en su representación del objeto. El esquema siguiente[36] expresa con claridad el papel central que desempeña el interpretante en el proceso de significación



[35] R. MONTAGUE, *Pragmatics, Contemporary Philosophy*, t. 1, R. KLIBANSKY ed., Florencia, 1968, pp. 102-121. A juicio de MONTAGUE la pragmática –como la semántica se interesa por la verdad, pero mientras que la primera no se interesa más que por la verdad en un modelo o en una interpretación, la segunda se interesa por la verdad "no solamente con relación a una interpretación sino también con relación a un contexto de uso" (*loc. cit.* p. 103), contexto que puede ser descrito de manera puramente formal. En la perspectiva de una "retórica" peirciana un interpretante de una teoría formal podrá ser otra teoría formal y, en estas condiciones, ya no es posible caracterizar las lenguas formales gracias a la ausencia de interpretantes. Antes que decir que los signos formales no tienen más interpretante que su estructura objeto, diremos con gusto que están caracterizados –y ésta es a nuestro juicio una intuición completamente innovadora de PEIRCE– por el poder que tienen de dar nacimiento a interpretantes formalmente equivalentes (para recoger la expresión peirciana). Dicho esto, la pragmática peirciana desborda con toda evidencia la prágmática de Montague que no es más que una semántica del contexto.

[36] Donde las líneas punteadas representan la generación sucesiva de interpretantes.

en la medida en que muestra que la relación signo-objeto no es nunca una relación directa, sino que está siempre mediatizada por la cadena de los interpretantes. Una retórica especulativa se ocupará en particular del estudio de la relación interpretante-interpretante[37]. Querríamos mostrar que en el marco de semejante retórica, puede hacerse un análisis de tipo modal, en términos de mundos posibles, de la noción de interpretante; análisis que, como veremos, permitirá precisar la noción de accesibilidad y dar un sentido al sistema de la cortadura punteada.

Observamos en primer lugar que en C.P. 5.481 PEIRCE describe ciertos interpretantes lógicos[38] como si nos empujaran *"a realizar diversas acciones en el mundo interior. Nos imaginamos en situaciones variadas y animados de móviles diversos; y nos ponemos a bosquejar las otras líneas de conducta que las conjeturas han dejado abiertas. Además somos llevados por la actividad misma, a señalar las diferentes maneras en que nuestras conjeturas podrían ser ligeramente modificadas. El interpretante lógico debe pues hallarse en un tiempo que tenga relación con el futuro"*[39]. En otro texto, que precede inmediatamente a la descripción de la trilogía del signo, PEIRCE describe una especie de observación en lo imaginario donde el sujeto crea un *"esbozo de sí mismo"* y *"considera las modificaciones que el hipotético estado de cosas exigiría hacer"* (C.P. 2.227). Una teoría pragmatista de la investigación, que define el sentido de un símbolo por la clase de operaciones a las que puede dar lugar, no tenía más remedio que poner el acento sobre la importancia de los "estados de cosas" (que llamaremos mundos hipotéticos o reales[40]) en que pueden efectuarse estas operaciones. En semejante perspectiva una retórica de los interpretantes puede aparecer como una descripción de los "mundos posibles" en el sentido kripkeano del término, descripción en que la relación que une un interpretante a otro interpretante podrá asimilarse a una relación de accesibilidad entre mundos. El estudio de semejante relación tendrá entonces por finalidad poner al día la lógica de las modalidades subyacente a esta teoría de los mundos posibles. Tal es, a nuestro juicio, la lógica a que nos introduce el sistema Gamma de la cortadura punteada.

2.3. Sistema Gamma y lógica "pragmática"

Si los interpretantes de un enunciado α pueden ser descritos como lugares hipotéticos o reales de experimentación sobre este enunciado, resulta que una retórica

---

[37] La otra tarea de la retórica consistiría en el estudio del encadenamiento del interpretante al signo original.

[38] En la clasificación peirciana de los interpretantes, estos interpretantes "lógicos" son conceptos generales, por oposición a los interpretantes "emocionales" (sentimientos) o "energéticos" (pertenecientes al dominio de la acción) Cf. en particular C.P. 5.475 ss.

[39] Tiempo que PEIRCE precisa más adelante diciendo que "la especie de futuro del interpretante es la del modo condicional, el "sería" " (C.P. 5.482).

[40] Si uno de los estados de cosas reales resulta ser el universo de los individuos existentes (Cf. 4.512), otros serán buscados entre los estados de cosas pasadas: en una investigación sobre un enunciado α tales estados pasados aparecerían como los lugares de experimentaciones ya realizadas o de otras investigaciones empíricas de α.

de los interpretantes puede entregarse a la tarea particular de estudiar las relaciones entre estos mundos. Sean x e y dos mundos interpretantes. La expresión $A\alpha xy$ significará que el interpretante x tiene un interpretante y en relación al enunciado α de x. Cosa que puede interpretarse en términos de accesibilidad: El mundo x tiene acceso al mundo y y este acceso es relativo al sentido de α de x[41]. $A\alpha xy$ es relativo a un signo; el signo en general podrá considerarse como si expresara una relación de accesibilidad entre los mundos de la investigación. En las presentaciones ordinarias de las semánticas modales se supone que todo enunciado tiene un valor de verdad en todo mundo posible, con lo cual se viene a decir que todo mundo es relativo a —es pertinente para—[42] todo enunciado formulable. Esto no se verifica para todos los mundos posibles que aparecen en un proceso de investigación. Un mundo puede ser perfectamente apropiado para la determinación de un saber sobre un enunciado α pero completamente no pertinente para β. Aunque un investigador pueda tener acceso a todos los mundos posibles que aparezcan a lo largo de su investigación, sólo serán tenidos en cuenta, para la determinación de un conocimiento sobre α, los que son pertinentes para α. Se propondrán entonces las siguientes definiciones semánticas de los operadores modales. Si $Vx\alpha$ se lee "α es verdadero en el mundo x" tendremos

$$VxN\alpha \quad \text{ssi} \quad (\forall y)\,(A\alpha xy \Rightarrow Vy\alpha)$$

y

$$VxPx \quad \text{ssi} \quad (\exists y)\,(A\alpha xy \wedge Vy\alpha)$$

El investigador examina no solamente el estatuto de α en un cierto número de mundos, a la vez hipotéticos y reales, sino que también juzga acerca de la pertinencia de estos mundos en relación al enunciado tal como él lo entiende. El concepto de conocimiento que por tanto aparece aquí es el siguiente: un enunciado α es "conocido" (en un mundo x) si y solamente si este enunciado es verdadero en todo mundo "accesible por la investigación" desde x pero también "pertinente para α" (dado el sentido de α tal como es entendido por el investigador). Observamos entonces que la lógica modal desarrollada en gamma puede aparecer como un intento de formalización de la semántica que acabamos de esbozar.

La presentación de Gamma como sistema deductivo nos obliga en primer lugar a que constituyamos su lengua con todo rigor, para lo cual

a) precisaremos el alfabeto utilizado. En el sistema Gamma se distinguirán los siguientes tipos de signos:

– las variables enunciativas $p, q, \ldots$

– la yuxtaposición de dos gráficos bien construidos (gbc)

---

[41] PEIRCE diría que está "grounded" sobre el sentido de α (o mejor sobre la relación de α con sus objeto).

[42] Traducimos por medio de este término la noción de "relevance relation" utilizada por ejemplo por Montague en el artículo arriba citado (Cf. pp. 118 ss.).

– una curva cerrada (cortadura alfa)
– una curva cerrada y punteada (cortadura gamma)
– el término vacío Λ[43]

b) daremos las reglas de formación de las expresiones bien formadas:

– *F1:* el término vacío es un gb*c*.
– *F2:* toda variable enunciativa es un gb*c*.
– *F3:* Si α es un gbc entonces (α) es un gbc obtenido al rodear α con una cortadura alfa no secante con las otras cortaduras
– *F4:* Si α es un gbc entonces (α) es un gbc obtenido al rodear α con una cortadura gamma no secante con las otras cortaduras
– *F5:* Si α y β son gbc entonces $\alpha\beta$ es un gb*c*.
– *F6:* No son gbc más que los gráficos construidos a partir de las reglas precedentes

c) enunciaremos las reglas de traducción que permitan el paso de la escritura peirciana a la escritura usual. Si A representa una variable proposicional y α y β unos gráficos cualesquiera, tendremos:

T1 $\quad A \longrightarrow A$

T2 $\quad \alpha\beta \longrightarrow \alpha \wedge \beta$

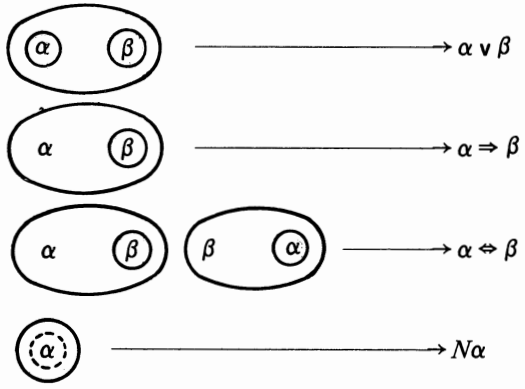
T3 $\quad (\alpha) \longrightarrow \neg\alpha$

T4 $\quad (\alpha) \longrightarrow P\neg\alpha$

T5 $\quad \Lambda \longrightarrow A \Rightarrow A$

[43] PEIRCE, como se ha visto, introduce en la lengua de su sistema la hoja de aserción representada por la pizarra u hoja de papel donde están escritos los gráficos. Elegiremos el término vacío Λ que posee la misma propiedad que la hoja de aserción, a saber, la neutralidad respecto de la yuxtaposición. Por cierto que esta es la razón por la cual generalmente no escribiremos más que los términos reducidos. Por ejemplo, en lugar de $\Lambda\ B\ (A)$ escribiremos $B\ (A)$.

Para los otros funtores tendremos las traducciones siguientes:



d) enunciaremos el axioma y las reglas de inferencia del sistema:

Axioma (axioma del cálculo enunciativo Alfa **: Cf. cap. I, § 2.23 A1: .

Reglas de deducción

1) *Reglas de cálculo enunciativo Alfa***: reglas R_1 (ins. y el.) R_2 (it. y desit.), R_3, formuladas en el cap. I, § 2.22.

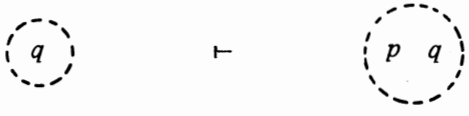
2) *Reglas para el cálculo modal*

A estas reglas se añadirán, para la lógica modal, las siguientes reglas (cf. C.P. 4.516) de las que no daremos más que la expresión gráfica:

– R_4 (ins): extensión de R_1 (ins)

Todo gráfico puede inscribirse en el interior de una superficie cerrada por una cortadura gamma, con la condición de que esta cortadura no esté rodeada más que por un número par (o nulo) de cortaduras alfa[44].

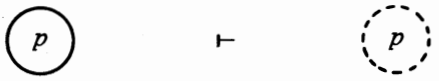
Por ejemplo:



es decir $P \neg q \vdash P \neg (p \wedge q)$

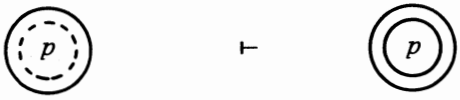
[44] Tomamos pues la regla en el sentido más restringido que a nuestro juicio es el de C.P. 4.516.

– R_5 Toda cortadura alfa rodeada de un número par (o nulo) de cortaduras (alfa o gamma) puede transformarse en cortadura gamma. De la misma manera toda cortadura gamma rodeada de un número impar de cortaduras (alfa o gamma) puede transformarse en una cortadura alfa. Así



es decir $\neg p \vdash P\neg p$

Por lo mismo



es decir $Np \vdash \neg\neg p$

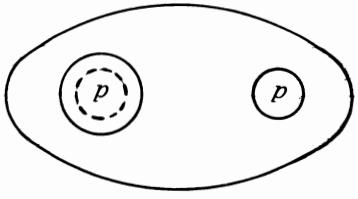
Se puede observar entonces que por medio de este sistema pueden engendarse las dos fórmulas características siguientes:

1) $$Np \Rightarrow p$$

Esta fórmula puede en efecto escribirse

$$\neg(\neg P\neg p \wedge \neg p)$$

Lo cual traducido a Gamma da lo siguiente



que se deriva del modo siguiente

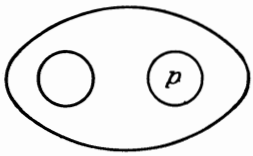
– por el axioma

Λ

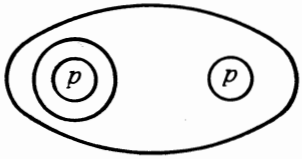
– por R_3

– por R_1 (el.)

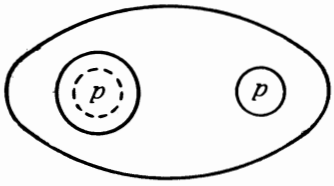
– por R_1 (ins)



– por R_2 (it)



– por R_5

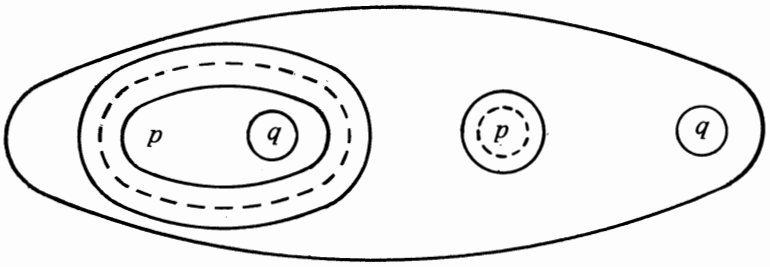


2) $N(p \Rightarrow q) \Rightarrow (Np \Rightarrow q)$

Esta fórmula en efecto puede escribirse

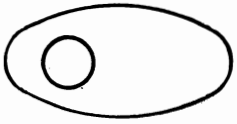
$$\neg[\neg P \neg \neg (p \wedge \neg q) \wedge (\neg P \neg p \wedge \neg q)]$$

o lo que es igual

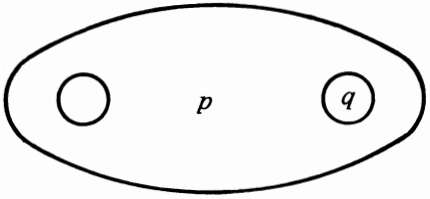


derivable de la siguiente manera:

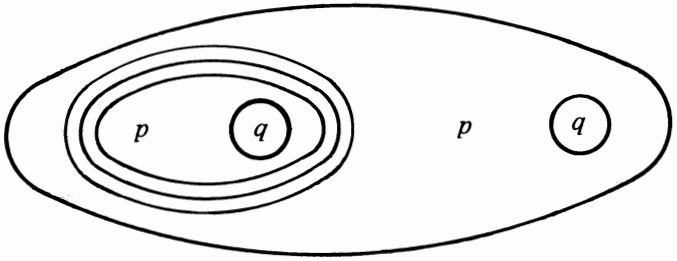
– por las tres primeras etapas de la demostración precedente



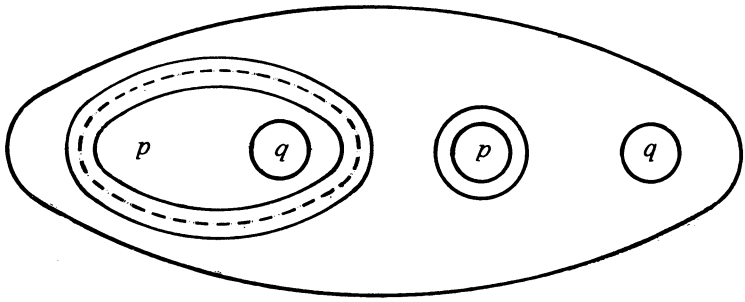
– por R_1 (ins)



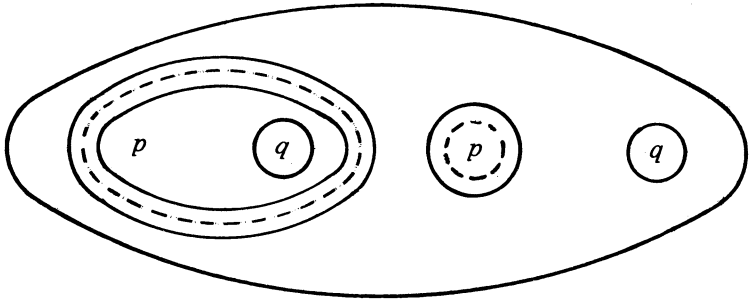
– por R_2 (it) y R_3



– por R_5 y R_3



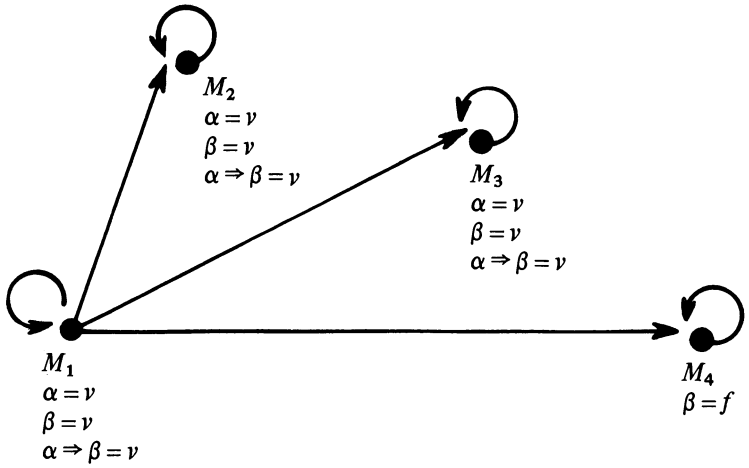
– por R_5



Con facilidad podría mostrarse que este sistema no permite engendrar como teorema

$$N(p \Rightarrow q) \Rightarrow (Np \Rightarrow Nq)$$

lo que viene a mostrar que el sistema Gamma no admite –a diferencia de un sistema tan débil como S.05– la trasmisión de la necesidad a través del modus ponens. Nos parece que, sin embargo, tan extraña cosa puede interpretarse en la semántica de la investigación desarrollada más arriba. En efecto, sea el modelo siguiente (en que las flechas representan relaciones de accesibilidad):



donde M_1, M_2 y M_3 son accesibles desde M_1 y pertinentes[45] en M_1 para α, β y $\alpha \Rightarrow \beta$ y donde M_4, aunque accesible para M_1, no es pertinente en M_1 más que para β. De las definiciones semánticas dadas más arriba resulta que en M_1 $N\alpha = v$, $N(\alpha \Rightarrow \beta) = v$ pero $N\beta = f$. Si hemos puesto en cada mundo una flecha que lo une consigo mismo. Ello se debe a que en Gamma hemos demostrado el teorema $Np \Rightarrow p$ que es la formulación característica de la reflexividad en los sistemas modales de tipo kripkeano. Una reflexividad tal, en nuestro contexto, significa que, para toda fórmula α de un mundo x, $(\forall x) A\alpha x x$, con lo cual se viene a postular que todo mundo tiene un intérprete que le pertenece y que está en contacto con este mismo mundo con relación a α[46], postulado que, una retórica de los interpretantes, puede aceptar como plausible.

Con estas breves observaciones querríamos simplemente llamar la atención sobre el interés del sistema Gamma para una retórica de los interpretantes. PEIRCE decía que la única finalidad de la creación de un sistema lógico era la investigación de la teoría de la lógica (cf. C.P. 4.373). Este es el espíritu con el que hemos intentado aplicar los datos de la lógica modal contemporánea a la propia teoría peirciana de la lógica como semiótica. Quedarían por estudiar de manera sistemática las derivaciones y las propiedades de Gamma y por preguntarse si este último puede suministrar una representación adecuada de ciertos procesos de la investigación intelectual.

---

[45] Una caracterización formal de esta noción de pertinencia podría obtenerse si se considera por ejemplo que un mundo M_j accesible a M_i le resulta pertinente para α si M_j ofrece una interpretación de α (interpretación que pueda caracterizarse formalmente). En semejante perspectiva se ve que todas las tautologías son necesarias y que ninguna fórmula consistente es necesaria.

[46] Con la noción de pertinencia utilizada más arriba esto se reduciría a decir que todo mundo puede ofrecer una interpretación para cada una de sus fórmulas.

Conclusión

DEL ALGEBRA A LOS GRAFICOS

DEL ALGEBRA A LOS GRAFICOS

"Los lógicos trazan círculos que se superponen o excluyen e inmediatamente todas sus reglas se aclaran"

G. BACHELARD, *La Poética del Espacio* (París: 1967), p. 191.

Al empezar este estudio, nos propusimos una doble finalidad. Ante todo pretendíamos reunir, de manera algo sistemática, un conjunto de resultados parciales dispersos a lo largo de una multitud de memorias, de artículos o de notas, respondiendo con ello en parte a un deseo que expresaba el mismo PEIRCE cuando, en 1894, anunciaba en *The Nation*, un proyecto de exposición sistemática de toda su obra en 12 volúmenes[1]. Como escribía entonces, la primera parte del segundo volumen previsto debía contener *"una exposición simple y elemental de lógica formal, ordinaria y relativa"*[2], mientras que la segunda parte debía reservarse para desarrollos más complejos. PEIRCE añadía que estas dos partes debían utilizar los artículos ya aparecidos en las *Memoirs of the American Academy* y en el *Journal of Mathematics*. En la presentación que hemos hecho de la lógica peirciana, hemos utilizado abundantemente estos artículos, no obstante lo cual, hemos incluido un cierto número de materiales escritos con posterioridad o extraídos de otras fuentes. PEIRCE preveía una tercera parte consagrada a un análisis del razonamiento deductivo, donde se mostraría en particular la naturaleza de sus elementos constituyentes[3]. Cuando se sabe la importancia que por entonces concedía PEIRCE —como pronto veremos— a la utilización de diagramas en la deducción, no cabe duda que esta tercera parte debería haber utilizado profusamente una presentación de tipo diagramático. PEIR-

---

[1] *The Principles of Philosophy: or Logic, Phisics, and Psychics, considered as a Unity, in the Light of the Nineteenth Century* (C.P. 8, p. 282).

[2] C.P. 8, p. 284. Estas líneas están extraídas del anuncio aparecido en *The Nation* el 11 de enero de 1894.

[3] "La tercera parte del volumen hace de ello un análisis minucioso (se trata del razonamiento deductivo) y muestra cuál es la naturaleza de sus diferentes elementos constitutivos (C.P. ibid.).

CE, como aún no había elaborado sus gráficos de entidades y sus gráficos existenciales debía sin duda pensar, en esta época, en una presentación gráfica del mismo tipo que la que está contenida en la carta a MITCHELL, brevemente estudiada en nuestro segundo capítulo[4].

Estas observaciones nos encaminan al segundo fin de nuestro estudio, que además es sin duda el más importante a nuestros ojos: poner en evidencia la doble presentación, algebraica y gráfica, de la lógica en PEIRCE. Al tratar de reconstruir la lógica peirciana de enunciados, nos ha llamado la atención el paralelismo existente entre los dos tipos de presentación. Todavía tenemos que preguntarnos sobre el sentido de tal paralelismo, tratando de situar las dos formas de exposición una con relación a la otra. Ya habíamos observado que a partir de 1885, y por tanto en pleno período de creación, PEIRCE abandona prácticamente todas sus investigaciones de álgebra lógica para consagrarse a los gráficos. ¿Acaso corresponde este hecho al reconocimiento de una superioridad favorable a estos últimos? A esta última cuestión es a la que trataremos de responder.

Para ello nos hace falta, antes que nada, mostrar cuál era para PEIRCE el fin último de la construcción de las álgebras y de los gráficos lógicos. Esta finalidad aparece con bastante claridad en las tentativas que hace PEIRCE por situar, una con relación a la otra, la actividad lógica y la actividad matemática. Se observa entonces, por paradójico que ello pueda parecer en una época que intenta la identificación más o menos completa de la lógica y de las matemáticas, y para un hombre que, siendo a la vez lógico y matemático, hubiera podido así conciliar los dos órdenes de investigación en los que trabajó toda su vida con igual pasión, que PEIRCE no dejó de subrayar las diferencias existentes entre ambas disciplinas. A la matemática definida por Benjamín PEIRCE, su padre, como *"la ciencia cuyo objeto consiste en extraer conclusiones necesarias"*[5] –definición que al insistir sobre el carácter deductivo y por ende lógico del discurso matemático, hubiera podido sugerir la afinidad profunda de las dos ciencias– PEIRCE opone la lógica concebida como *"la ciencia cuyo objeto consiste en preguntarse sobre la manera de extraer conclusiones necesarias"* (C.P. 4.239)[6]. Al matemático, práctico en la deducción se opone el lógico, teórico del razonamiento deductivo mismo[7]. Sus intereses son, pues, esencialmente diferentes: *"El matemático se interesa ante todo por los métodos eficaces de razonamiento con la vista puesta en su eventual aplicación a nuevos problemas; pero,*

---

[4] Arriba pp. 106 ss.

[5] B. PEIRCE "Linear Associative Algebras, with notes and addenda by C.S. PEIRCE", *American Journal of Mathematics*, 4 (1881), p. 97 (B. PEIRCE escribió esta obra en 1870). PEIRCE recoge repetidamente la misma definición de las matemáticas (Cf. C.P. 3.558, 4.229).

[6] En C.P. 4.242 PEIRCE opone "la ciencia que razona" a "la ciencia del razonamiento".

[7] Podría objetársenos que, estrictamente hablando, el estudio del razonamiento no corresponde más que a una rama de la lógica llamada por PEIRCE "Crítica" (Cf. arriba, cap. 1, n. 82). Pero el propio PEIRCE declara que la esencia de la lógica es la "Crítica" (Cf. C.P. 2.203, 4.9, 5.130, 5.159). Ello se debe a que la proposición y el concepto pueden reducirse al razonamiento, lo cual significa, en última instancia, que los problemas de la verdad y del sentido se reducen a los problemas de validez (Cf. C.P. 5.142, 5.175, 2.444 nota 1, 3.440).

como matemático, poco le preocupa un análisis minucioso de las partes de este método cuya exactitud es evidente. Los diferentes aspectos que el álgebra de la lógica presentará para los dos hombres son instructivos a este respecto. El matemático pregunta qué valor posee este álgebra como instrumento de cálculo. ¿Puede ser aplicada para resolver una cuestión complicada? ¿Es capaz, de un solo golpe, de alcanzar un resultado alejado? El lógico no desea que el álgebra tenga este carácter" (C.P. 4.239)[8]. El lógico no se interesa por el descubrimiento de conclusiones, sino por el estudio de teorías que muestran las relaciones entre estas últimas y las premisas. A partir de este tema fundamental las variaciones se multiplican en la obra de PEIRCE, todas las cuales tienden a oponer lo operativo a lo descriptivo: a la *"lógica utens"* del matemático corresponde la *"lógica docens"* del lógico (cf. C.P. 1.417) al *"cálculo"* del primero, la teoría del segundo (cf. C.P. 4.373, 3.618)[9]. Esta distinción de fines va a traducirse por tanto en una oposición de procedimientos: *"Estas dos miras son incompatibles. La razón de ello es que el sistema concebido para la investigación de la lógica debería ser todo lo analítico posible, fragmentando las inferencias para obtener el mayor número posible de etapas e insertándolas en las categorías más generales posibles; mientras que un cálculo, por el contrario, trata de reducir todo lo posible el número de los procesos y de especializar los símbolos de manera que se adapten a los modos particulares de inferencia"* (C.P. 4.373)[10].

Se concibe pues que para PEIRCE el problema de las relaciones entre las dos disciplinas se plantee menos en términos de inclusión que de polaridad, polaridad que sería la misma que une al ojo que contempla con la vista contemplada. Bien es verdad que un lenguaje de inclusión a veces todavía aparece aquí, en la obra de PEIRCE, que oscila entre dos polos opuestos[11]. Pero parece en efecto que una de las constantes del pensamiento peirciano sigue siendo la insistencia puesta en subrayar la distancia más que la proximidad[12]. Subrayada de esta manera la originalidad

---

[8] En C.P. 4.370, al hacer un interesante análisis de los diversos intereses que puede presentar un "análisis matemático", PEIRCE opone de nuevo las preocupaciones del lógico a las del matemático. Añade el interés lógico un interés llamado "metodeútico" referente a los métodos empleados para descubrir las conclusiones. Pero es sabido que en la trilogía peirciana de la lógica (Cf. arriba, cap. 1, n. 82), la propia "metodeútica" forma parte de la lógica.

[9] Si el lógico utiliza el cálculo sólo lo hará pues como herramienta al servicio del análisis del razonamiento deductivo (Cf. C.P. 3.322, 3.364, 4.424, 4.533). Puede no obstante "entretenerse" con el uso del cálculo por el cálculo mismo, utilizando sus procedimientos para "extraer conclusiones mecánicamente" (C.P. 4.617). Gracias a este texto (al igual por cierto que el C.P. 4.481 al cual ya hemos hecho alusión) se justifica nuestro estudio de los sistemas Alfa y Beta como sistemas deductivos, así como nuestro examen de las derivaciones a partir de los sistemas de cálculo de clases y de cálculo enunciativo. Pero se ve con facilidad que, a juicio de PEIRCE, no se trata más que de una actividad secundaria para el lógico (Cf. C.P. 4.581), y que pertenece más a las matemáticas que a la lógica.

[10] Cf. también Ms. 455 y C.P. 4.239, 4.533 donde aparece con bastante claridad el ideal de "analiticidad" que caracteriza al procedimiento lógico.

[11] La idea de una matemática considerada como rama de la lógica aparece en particular en 1867 (Cf. C.P. 3.20 y 42-43-44), mientras que un tipo de relación inversa es descrita en 1902 (Cf. C.P. 2.191, 2.197).

[12] Así por ejemplo, en C.P. 4.134: "... la derivación de conclusiones válidas a partir de premisas... es la única tarea del matemático. De esta manera se hace de las matemáticas una rama

de la investigación lógica por relación a la investigación matemática[13], nos queda por ver qué tipo de presentación lógica responde mejor al ideal definido por PEIRCE.

En el artículo de 1897 donde introduce sus gráficos de identidad, PEIRCE parece conceder una ligera preferencia al método algebraico sobre el método gráfico: *"Este álgebra (Algebra General de la Lógica)... representa, a mi parecer, el aparato más cómodo para el estudio de los problemas lógicos difíciles"* (C.P. 3.502; cf. C.P. 3.499). Pero añade inmediatamente que "el método gráfico es susceptible de modificaciones que lo hacen, en su conjunto, igualmente cómodo en la mayoría de los casos" (C.P. 3.502). Los gráficos existenciales realizarán estas transformaciones deseadas. Pero puede decirse que, a partir del momento en que estos últimos son introducidos, PEIRCE se convence cada vez más de la superioridad de los gráficos sobre el álgebra. Desde 1903, cuando hace alusión a sus estudios gráficos de los razonamientos, no duda en escribir: *"Mis análisis del razonamiento ganan en profundidad a cuanto ha sido publicado hasta hoy –en lenguaje de palabras o de símbolos– a cuanto han podido adelantar los DE MORGAN, DEDEKIND, SCHRÖDER, PEANO, RUSSELL y otros, hasta tal punto que la diferencia entre sus trabajos y los míos evoca la distancia que existe entre un boceto a lápiz y una fotografía"* (C.P. 5.147). Tenemos que intentar comprender las razones de este entusiasmo de PEIRCE por el método gráfico.

Ante todo puede decirse que el método gráfico parece responder mejos que el método algebraico al ideal de *"analicidad"* definido más arriba para la lógica. Como escribe PEIRCE en 1906, uno de los fines esenciales de los gráficos existenciales es el de *"proporcionar un método... que permita representar las proposiciones... de la manera lo más analítica posible"* (C.P. 4.561, n. 1). La complejidad que de ello resulta para el gráfico se convierte entonces en una verdadera ventaja a los ojos del lógico, pues *"... muestra el extraordinario poder analítico del sistema*[14] *que analiza condiciones que, a primera vista, parecen muy simples, pero que en realidad son muy complejas, como nos obliga a reconocerlo el sistema de los gráficos"*[15].

Se ha visto que para PEIRCE lo importante era descomponer la inferencia en el número máximo de etapas, al mismo tiempo que estas últimas son subsumidas bajo las categorías lo más generales posibles (cf. C.P. 4.373). En lo que se refiere a la primera tarea un ejemplo simple nos mostrará aquí la superioridad de un *"análisis"* de tipo gráfico. Una demostración de tipo algebraico del razonamiento:

---

de la lógica o *de esta manera se quita este papel a la lógica*, todo depende de la manera que se tenga de clasificar las ciencias. Me pronuncio en favor de la última hipótesis que hace de la lógica un análisis y teoría del razonamiento pero no una práctica de este último."

[13] Originalidad que no nos debe hacer olvidar sin embargo las privilegiadas relaciones que se establecen entre el lógico y el matemático, ya que este último ofrece al lógico los ejemplos más perfectos de razonamiento (Cf. C.P. 4.425).

[14] Aquí PEIRCE hace alusión a los gráficos gamma.

[15] Ms. 470.

Todo hombre es animal
Todo animal es mortal
Luego todo hombre es mortal

utilizaría normalmente cuatro etapas que podrían presentarse como sigue:

1.ª Premisa: $(\forall x)\ (H(x) \Rightarrow A(x))$
2.ª Premisa: $(\forall x)\ (A(x) \Rightarrow M(x))$

1/ $H(x) \Rightarrow A(x)$
2/ $A(x) \Rightarrow M(x)$
3/ $H(x) \Rightarrow M(x)$
4/ $(\forall x)\ (H(x) \Rightarrow M(x))$

La superioridad propiamente analítica del método gráfico aparece en seguida si se compara esta demostración con el análisis gráfico del mismo razonamiento presentado en el Capítulo 2[16], que utilizaba ocho etapas[17]. La presentación algebraica del razonamiento citado muestra claramente en qué sentido, como PEIRCE lo indica, *"el empleo del álgebra en la investigación de la lógica presenta un peligro: puede degenerar en un juego inútil, demasiado rudimentario para tener un interés matemático y demasiado superficial para tener un interés lógico"* (C.P. 3.619). Por el hecho de que degenera rápidamente en un cálculo, el álgebra no ofrece más que un interés secundario para el lógico analista[18]. En lo que se refiere a la segunda investigación, la de las categorías más generales que subsumen las diversas operaciones realizadas, la superioridad del análisis gráfico aparece sin duda con menos evidencia. Se sabe que en 1902 PEIRCE reduce todas las operaciones lógicas a dos operaciones generales: la inserción y la omisión (cf. C.P. 4.374)[19]. La interpretación de las reglas alfa, beta y gamma en términos de inserción y de omisión de gráficos no presenta dificultad[20]. Pero PEIRCE, en un ensayo del mismo año (Cf. C.P. 4.280), observa que se-

[16] Cf. arriba, pp. 123 ss. (Cf. C.P. 4.571).

[17] PEIRCE ofrece 7, pero anota que se podría llegar a 9 (Cf. C.P. 4.571).

[18] Sería exagerado interpretar esta observación como una condenación del método algebraico. Para PEIRCE el análisis no es más que un ideal nunca perfectamente alcanzado: "Proponerse el acabamiento absoluto del análisis no es menos ilusorio que pretender la omnisciencia. Llevad vuestro esfuerzo todo lo lejos que queráis, siempre quedará alguna cosa que habrá escapado al análisis" (C.P. 8, p. 312). Lo cual parece sugerir que un tipo de análisis, incluso superior a otro, sigue siendo en algún sentido arbitrario.

[19] No cabe duda de que preocupaciones extra-lógicas influyeron en esta reducción de las operaciones lógicas. En su teoría psicológica de la asociación desarrollada en 1893, PEIRCE analiza el movimiento del pensamiento que conduce de A a B por medio de dos operaciones, "una de las cuales lleva de A a AB, y la otra de AB a B" (C.P. 7.393; cf. 7.399, 7.430).

[20] Para estas reglas remitimos a las exposiciones ofrecidas en los capítulos precedentes.

mejante interpretación está ya implícita en las definiciones de la multiplicación y de la suma lógicas de 1880. Todo lo más podría decirse que, en inferencias complejas, la interpretación de las operaciones en un lenguaje de inserción y de omisión es quizás más inmediata en una presentación gráfica que en una presentación algebraica.

Pero PEIRCE parece conceder una importancia muy especial a este carácter de inmediatez de la interpretación gráfica. Tal como escribe en 1911, una de las ventajas de los gráficos es la de conducir "más *directamente*[21] *al último análisis de los problemas lógicos que ninguna especie de álgebra jamás inventada*" (C.P. 3.619). Esta observación nos lleva a poner en evidencia una nueva razón de la superioridad de los gráficos. Tal como PEIRCE señala muy pronto (Cf. C.P. 3.418), el método gráfico resulta más *"icónico"* que el método algebraico. Ya habíamos encontrado, en el estudio del sistema proposicional de 1885, la noción de icono. En la clasificación peirciana de los signos en iconos, índices y símbolos[22], el icono concebido como signo unido a su objeto por una relación de analogía (cf. C.P. 2.279, 3.363, 4.433), interesa especialmente al lógico y al matemático. El pensamiento icónico se identifica en efecto para PEIRCE con el pensamiento deductivo en el sentido de que el razonamiento deductivo parte de la observación de imágenes que exhiben las relaciones sobre las cuales se razona: "... *todo razonamiento deductivo... encierra un elemento de observación; dicho de otra manera, la deducción consiste en construir un icono o diagrama cuyas relaciones entre las partes presentan una analogía completa con las de las partes del objeto del razonamiento; en experimentar sobre esta imagen en la imaginación, y en observar el resultado de manera que se descubran las relaciones ignoradas y ocultas entre las partes*"[23] (C.P. 3.363). Desde semejante perspectiva la lógica se convierte, en primer lugar, en una reflexión sobre los iconos construidos por el matemático[24]. Pero una reflexión que debe utilizar los útiles del matemático. Tal como PEIRCE lo escribe: *"El razonamiento por diagramas es el único razonamiento verdaderamente fecundo. Con que los lógicos quisieran adoptar este método... se daría enseguida un progreso en lógica de tal categoría que cada una de las ciencias resultaría beneficiada por ello"* (C.P. 4.571).

Se puede encontrar en PEIRCE tres grandes tipos de iconos utilizados en lógica. El primero está constituido por el conjunto de los enunciados silogísticos. Al analizar el silogismo:

---

[21] El subrayado es nuestro.

[22] Cf. arriba cap. 1, n. 85. Esta división es una de las diez tricotomías peircianas de los signos, pero PEIRCE la presenta como "la más fundamental" (C.P. 2.275).

[23] En C.P. 4.7, PEIRCE se refiere expresamente a su teoría pragmatista del conocimiento: semejante teoría no podía sino privilegiar estos dos momentos de la ciencia que son la observación (Cf. C.P. 1.34, 2.227), y la experimentación (cf. C.P. 4.233, 4.530).

[24] La definición de la matemática como ciencia de la construcción de los iconos aparece en particular en C.P. 3.556 y 4.233 (en 3.556 PEIRCE hace expresa referencia a KANT).

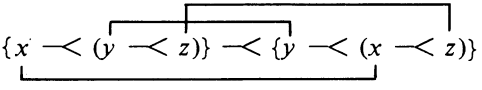
Todo *M* es *P*
S es *M*
Luego *S* es *P*

PEIRCE escribe: *"Esto es en realidad un diagrama de las relaciones entre S, M y P. El hecho de que el término medio intervenga en las dos premisas no cabe duda de que resulta manifiesto, y esto hay que hacerlo so pena de quitarle todo valor a la notación"* (C.P. 3.363).

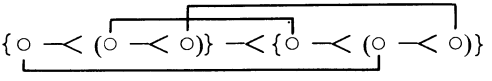
El segundo tipo está constituido por el conjunto de las fórmulas algebraicas que pueden llamarse icónicas en la medida en que las manipulaciones gráficas, que pueden hacerse con estas últimas, concretan las manipulaciones abstractas sobre los objetos lógicos[25]. Ya habíamos encontrado tales iconos algebraicos en los esquemas de axiomas del sistema proposicional de 1885. Para mostrar mejor el aspecto icónico del segundo icono del sistema, representado por PEIRCE bajo la forma:

$$\{x \prec (y \prec z)\} \prec \{y \prec (x \prec z)\}$$

bastará con representarlo así:



o mejor:



con lo cual, a nuestro juicio, se consigue bastante bien que aparezca la idea general de substitución indefinida, que está encerrada en la noción de esquema de axioma.

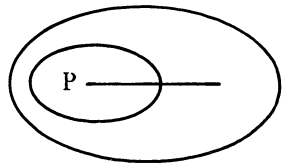
Pero nos encaminamos aquí hacia un nuevo tipo de iconos constituido por los iconos geométricos. No tenemos por qué dar ejemplos de estos últimos puesto que los hemos utilizado abundantemente al presentar los gráficos de entidad y los gráficos existenciales en los capítulos precedentes[26]. La única cuestión que nos preocupa es la de comprender la razón de la superioridad concedida por PEIRCE a este último tipo de iconos sobre los *"diagramas"* algebraicos.

---

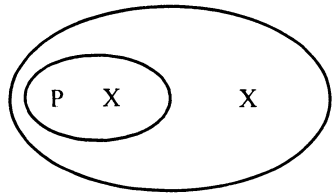
[25] Cf. C.P. 2.279, 3.418, 3.556, 4.233. En C.P. 1.34 PEIRCE cita a Gauss cuando éste presenta el álgebra como "una ciencia del ojo".

[26] En C.P. 4.420 PEIRCE define la noción de gráfico lógico por medio de la noción de iconicidad: "Un *gráfico lógico* es un gráfico que representa icónicamente relaciones lógicas, de manera que se facilite el análisis lógico".

La respuesta quizás ya ha aparecido antes, cuando nos ha parecido necesario presentar "geométricamente" el segundo icono algebraico de 1885. Se observa que la representación gráfica es más directa que la representación algebraica. Esta idea aparece especialmente en PEIRCE en un texto de 1906 donde critica la noción de *"selector"*. Esta noción había sido introducida en 1903 para simplificar la lectura de los gráficos que comprenden un número demasiado elevado de líneas de identidad (Cf. C.P. 4.460)[27]. Estas últimas pueden entonces ser substituidas por letras mayúsculas puestas en el lugar de sus extremos (Cf. C.P. 4.408, 4.460), de modo que el gráfico clásico:



se convierte entonces en:



Pero apenas haber introducido el selector, PEIRCE muestra que puede prescindirse de él (Cf. C.P. 4.462), e incluso que debe ser evitado (Cf. C.P. 4.473). La crítica peirciana del selector nos parece importante para nuestro propósito puesto que, al corresponder el selector a la noción moderna de variable ligada, su crítica es de hecho una crítica de los diagramas de tipo algebraico. C.P. 4.561, n. 1 es el lugar donde PEIRCE muestra que el selector es menos icónico que la línea de identidad, pues, dice, es necesaria una *"convención particular"* para expresar la identidad de los individuos representados, mientras que la línea de identidad lleva consigo este sentido por el hecho mismo de la continuidad de sus puntos. La identidad de los dos selectores, escribe PEIRCE, *"no es expresada más que de una manera simbólica"* y añade: *"... icónicamente aparecen* (los selectores) *simplemente como coexistentes... Pero la línea de identidad... muestra muy explícitamente que la identidad*

[27] Merece notarse que en el mismo año PEIRCE utiliza también el selector para representar las líneas de identidad concebidas como "abstracciones", como se ha visto en el capítulo precedente (Cf. C.P. 4.525).

pertenece al género de la continuidad y a la especie de la continuidad lineal[28] (C.P. 4.561, n. 1).

Pero de este alto grado de iconicidad de la línea de identidad[29] también participan la hoja de aserción y la cortadura. Por su continuidad misma la hoja de aserción se convierte en el mejor icono del *"universo del discurso": "Al ser la continuidad de esta superficie bidimensional, y por ende poliádica, debe representar una continuidad externa y, en particular, una continuidad de aparición en la experiencia* (C.P. 4.561, n. 1). Puesto que la hoja de aserción *"... representa el campo de la atención, representa el objeto general de esta atención, el Universo del discurso. Si esto es así, la continuidad (de la hoja de aserción) en los lugares en que, por no estar nada escrito, nada es objeto de una atención* particular, *es el icono más apropiado posible*[30] *de la continuidad del Universo del Discurso, allí donde solamente es objeto de una atención general en cuanto que es este universo en concreto"*[31] (C.P. ibid.). El sentido de la cortadura aparece entonces con claridad: *"... nuestra hoja alfa, tomada como un todo, representa solamente un universo de individuos existentes*[32] *y las diferentes partes de la hoja representan los hechos o las afirmaciones verdaderas hechas sobre este universo*[33]. *En el nivel de las cortaduras entramos en otras superficies, las de las proposiciones pensadas pero no realizadas"* (C.P. 4.512). Ya que las cortaduras son discontinuidades sobre la hoja de aserción, introducen la idea de una

---

[28] Es evidente que el selector y la línea de identidad tienen ambos necesidad en su punto de partida de una convención para expresar individuos. Pero la ventaja de la línea de identidad es la de no necesitar una convención particular para significar la identidad de los individuos representados. En este sentido, responde mejor al ideal de simplicidad tal como PEIRCE lo define en C.P. 4.561, n. 1.

[29] Debe notarse que la línea de identidad también le parece a PEIRCE altamente indicativa y simbólica, lo cual hace de ella uno de los signos más perfectos que pueden existir (Cf. C.P. 4.448).

[30] Este icono es presentado unas veces bajo la forma de una película "sobre la cual hay, por así decirlo, una fotografía sin revelar de los hechos del universo" (C.P. 4.512), otras veces bajo la forma de un mapa geográfico cuyos puntos están en correlación con los elementos del universo del discurso (Cf. C.P. 4.513).

[31] En la medida en que el pensamiento puede aparecer como un signo "que se desarrolla conforme a las leyes de la inferencia" (C.P. 5.313). PEIRCE también presenta a veces la hoja de aserción como el mejor icono del espíritu: "La hoja de los gráficos... representa el *Espíritu* en su relación con sus pensamientos, considerados como signos... Los gráficos representados son las *determinaciones* de la hoja, exactamente igual a la manera en que los pensamientos son las *determinaciones* del espíritu; y el espíritu mismo es un pensamiento omnicomprensivo, de la misma manera en que la hoja de aserción, considerada en la realidad de todos sus procesos y estados de transformación, considerada colectivamente, es un gráfico ocasional y, considerado en todas sus transformaciones, permitidas, es un gráfico. Así el sistema de los gráficos existenciales es un diagrama del Espíritu, diagrama somero y generalizado, y da mejor una idea de lo que es el espíritu, desde el punto de vista lógico, que cualquier exposición abstracta" (C.P. 4.582; Cf. 4.11).

[32] Lo cual explica que PEIRCE no conciba que haya sobre la hoja de aserción lugares predicativos sin ganchos (Cf. C.P. 4.441): no existen en el universo cualidades sin individuos susceptibles de recibirlas.

[33] Por tanto toda yuxtaposición representa icónicamente una conjunción (se había visto que los gráficos de entidades presentaban un defecto de iconicidad al interpretar la yuxtaposición como una disyunción (Cf. C.P. 4.434), y PEIRCE los había rechazado por esta razón).

discontinuidad del universo del discurso[34], discontinuidad que traducirá igualmente la ruptura de una línea de identidad. Se ve pues que los aspectos esenciales del *"universo del discurso"* pueden traducirse visualmente –y de una manera relativamente directa– por los procedimientos de los gráficos existenciales. Más arriba se había visto que una de las ventajas de los gráficos era la de hacer complejo lo simple, obligándonos de esta manera a profundizar en el análisis. Gracias a la iconocidad PEIRCE piensa que lo complejo va a poder convertirse de nuevo en simple y en ello ve la segunda ventaja del sistema de los gráficos existenciales: *"El sistema de los gráficos existenciales posee en un grado sin igual esta virtud inherente a la mayoría de los diagramas, la de presentar una cuestion verdaderamente compleja bajo una luz tal que su representación sea completa y adecuada y sin embargo tan simple y natural como echar un árbol a una corriente de agua"*[35].

No obstante, una de las descripciones que PEIRCE da de la hoja de aserción como icono de la continuidad del *"universo del discurso"* nos sugiere la existencia de una tercera razón de la superioridad acordada por PEIRCE a los gráficos. En 1903, al describir el *"universo del discurso"*, PEIRCE escribe: *"Os pido que imaginéis que todas las proposiciones verdaderas han sido formuladas; y puesto que los hechos se interpenetran no se puede concebir la cosa como posible más que en un continuo. Es claro que este continuo debe tener más dimensiones que una superficie o incluso que un sólido; y lo supondremos plástico, de modo que pueda ser deformado de cualquier manera, sin que la continuidad y las relaciones entre las diversas partes se rompan jamás. Se puede imaginar que la hoja blanca de afirmación es la fotografía de este continuo"* (C.P. 4.512). Este párrafo sugiere una posible interpretación topológica de los gráficos existenciales. Ahora bien, sabida es la importancia que PEIRCE concede a la topología. Descrita como: *"... el estudio de las relaciones continuas y de las faltas de continuidad de los loci susceptibles de ser deformados de una manera cualquiera en cuanto que queda preservada la integridad de las relaciones y de las separaciones de todas sus partes"* (C.P. 4.219; cf. 4.428), la topología aparece en la clasificación peirciana de las ciencias como la *"forma más elevada de las Matemáticas"* (C.P. 1.283). Si se recuerda que para PEIRCE el fin principal de la lógica era una mejor comprensión de la naturaleza del razonamiento matemático, se entiende que el análisis de los procedimientos topológicos aparezca como *"una de las primeras tareas de los lógicos"* (C.P. 3.526).

Desde 1903, PEIRCE parece percibir claramente el interés del sistema de los gráficos existenciales para un estudio de las matemáticas en general y de la topología en particular: *"La tópica geométrica sigue siendo impotente en lo que se refiere a problemas, aparentemente muy simples, problemas no resueltos que no dejan de im-*

---

[34] Esta discontinuidad puede subsistir, aún cuando una encajadura de cortaduras produzca el retorno a lo verdadero (Cf. C.P. 4.512). Debe notarse que las cortaduras de que hablamos aquí son las cortaduras alfa y beta, pero la cortadura punteada de gama nos llevaría a una nueva discontinuidad de tipo modal.

[35] Ms. 470. Imagen inspirada sin duda por el espectáculo de los árboles cortados al descender por los ríos de su país.

portunarla, por la simple razón de que los matemáticos no han descubierto un método para razonar sobre ella. Ahora bien, la comprensión profunda del razonamiento matemático debe sernos una ayuda preciosa para descubrir un método de razonamiento válido en este dominio como, muy verosímilmente, en otros temas que ni siquiera se reconoce que son de orden matemático. Tal es pues la función para la cual han sido concebidas mis álgebras lógicas, pero que a mi juicio no cumplen perfectamente. El presente sistema de los gráficos existenciales es a este respecto mucho más acabado" (C.P. 4.428-429). Lo esencial de las investigaciones peircianas sobre la topología aparece en un conjunto de manuscritos matemáticos escritos después de 1891 con una finalidad pedagógica[36]. Es decir, que PEIRCE se interesó por la topología en la época misma en que se apasionaba por sus gráficos. Sin duda en esto hay que ver algo más que una coincidencia. Y no nos parece exagerado, en estas condiciones, que se presenten los gráficos existenciales como un intento de "topología" de la lógica. Pero para comprender bien la profundidad de la conversión peirciana a los gráficos, sin duda será necesario llevar más lejos el análisis, señalando que la época de la topología lógica y matemática es también la época en que PEIRCE elabora la doctrina filosófica del *"Sinejismo"*[37]. Es claro que los gráficos existenciales, en la medida en que son topológicos, nos introducen en semejante filosofía del continuo. PEIRCE, en 1901, observa que los progresos de la topología matemática han sido frenados por *"la falta de una lógica elaborada del continuo"* (C.P. 3.642). La importancia concedida en el sistema de los gráficos existenciales a la representación del concepto de identidad (cf. C.P. 4.448) nos sugiere la pregunta de si los gráficos existenciales no tendrían la finalidad de llenar este vacío. Al menos esto es lo que parece sugerir la siguiente reflexión de 1906 en que termina un estudio dedicado a los gráficos gamma: *"Alcanzamos aquí el punto en que nuevas consideraciones relativas a la constitución del saber y por tanto a la constitución de la naturaleza se imponen al espíritu con la fuerza y el carácter imperioso y multiforme de los cataclismos. Precisamente para esta síntesis del tijismo*[38] *y del pragmatismo propuse yo, hace ya mucho tiempo, el término de Sinejismo, al que por tanto volvemos; pero ahora provistos de razones más sólidas que nunca"* (C.P. 4.584).

Semejante observación, al igual que otras muchas en que PEIRCE une expresamente sus gráficos existenciales a su filosofía de los signos (cf. C.P. 2.315, 2.320) y a su pragmatismo (cf. 4.7, 4.534, 4.581), nos ayuda a comprender mejor por qué PEIRCE consideraba su sistema de los gráficos existenciales como su *"obra maestra"*[39], pero, al mismo tiempo nos indica la vía por la que podría seguir la investiga-

[36] La topología aparece en dos manuscritos: "The New Elements of Geometry" (Ms 94) que recoge un texto de Benjamín PEIRCE y "Elements of Mathematics" (Ms 165). La topología de su época que conocía PEIRCE parece que en esencia era la de Listing (Cf. C.P. 5.490, 6.211).

[37] El término aparece por primera vez –en los escritos publicados– en 1892 (Cf. C.P. 6.103). PEIRCE presentaba entonces el Sinecismo como la "tendencia a considerar la continuidad... como una idea de primera importancia en filosofía (C.P. ibid.). Lo define en 1897 como "la doctrina que sostiene que todo lo que existe es continuo" (C.P. 1.172).

[38] Se trata de la doctrina peirciana del indeterminismo (Cf. C.P. 6.46 ss.).

[39] C.P. 4, p. 291.

ción que hemos emprendido. Por otra parte, en la medida en que nuestra investigación se refiere a lo que PEIRCE llama, en su clasificación de las ciencias, la *"matemática de la lógica"* (cf. C.P. 1.185), se evidencia que exige una dilucidación todo lo completa posible de la obra propiamente matemática de PEIRCE, la cual, por cierto, no puede a menudo comprenderse sino a la luz de las aportaciones matemáticas de Benjamín, su padre, que, como es sabido, ejerció una profunda influencia sobre él. Sin duda estas dos vías –filosofía de los signos y teoría matemática– son las que debería continuar la investigación que hemos realizado.

Semejante estudio debería también preguntarse por las esperanzas de éxito que podría tener el abandono del álgebra en favor de los gráficos. Cabe en efecto preguntarse si el optimismo, de que dio muestras PEIRCE al final de su vida está totalmente justificado, cuando se ven las dificultades con las que chocó el propio PEIRCE en el nivel de la elaboración del sistema Gamma de los gráficos existenciales. Al adaptarse bastante bien a la descripción de los procedimientos elementales del pensamiento lógico, los gráficos peircianos parecen incapaces de dar cuenta de la estructura general de un sistema[40]. Está permitido preguntarse si la noción misma de icono no está, al menos en parte, en el origen de las dificultades halladas, en la medida en que la relación icónica nos lleva a iconos de iconos que no pueden dominarse totalmente.

[40] Sabido es que Husserl será uno de los primeros lógicos que captarán la importancia de lo que llama "los problemas de totalidad en la lógica": "Al remontarnos a la teoría sistemática o de la multiplicidad, quedaron incluidos en la lógica los problemas de la totalidad en la medida en que podían plantearse como problemas formales" y añade en una nota: "La exposición de las *Logische Untersuchungen* tiene el defecto de no haber colocado esta idea en el lugar central, subrayándola repetidas veces; cuando este pensamiento determina constantemente el sentido de todo su desarrollo" (El autor cita la traducción francesa de esta obra hecha por S. Bachelard: *Logique formelle et logique transcendentale*, p. 137. N. del T.).

CUADRO CRONOLOGICO

Fechas	Algebras de clases y de proposiciones	Algebra de los relativos	Algebras de segunda intención	Investigaciones gráficas
1867	– On an improvement in Boole's calculus of Logic – Upon the logic of Mathematics			
1870		Description of a Notation for the Logic of Relatives		
1880	– On the Algebra of – A Boolian Algebra with one constant	On the Algebra of Logic		
1882		Brief Description of the Algebra of Relatives		Carta a O.H. Mitchell del 21 dic. 1882 (primeros gráficos)
1883		The Logic of Relatives		
1885	On the Algebra of Logic. A contribution to the philosophy of Notation	On the Algebra of Logic. A contribution to the philosophy of Notation	On the Algebra of Logic. A contribution to the philosophy of Notation	
1892		The Critic of Arguments		
1893			Grand Logic (chap. 14)	
1896	The Regenerated Logic	The Regenerated Logic		
1897		The Logic of Relatives	The Logic of Relatives	The Logic of Relatives (gráficos de entidades)
1898				Detached ideas on vitally important Topics (gráficos existenciales)
1901	Minute Logic (ch. 3)	Article "Relatives dans le *Dictionary of philosophy and Psychology* de Baldwin		Articulo "symbolic Logic" en el *Dictionary of philosophy and Psychology* de Baldwin
1903		Nomenclature and divisions of dyadic relations		– Lowell Lectures (Lectura IV) – A Syllabus of certain Topics of Logic – Logical Tracts N.º 2
1906				– Prolegomena to an Apology for Pragmaticism – For the National Academy of Science, 1960 April Meeting in Washington
1909	M2 339			
1911				Ms 500

INDICE DE LAS OBRAS CITADAS

Los textos de PEIRCE que hemos utilizado han sido extraídos de:

1/ Collected Papers of Charles Sanders Peirce, Vol. 1-6, ed. Charles HARTSHORNE y Paul WEISS; Vol. 7-8, ed. A. W. BURKS (Cambridge, Massachussetts: Harvard University Press, 1931-1958).

2) Manuscritos que se encuentran en la Houghton Library, Universidad de Harvard (U.S.A.). Hemos utilizado los manuscritos siguientes: Ms 94, 165, 339, 450, 455, 470, 500 y la carta de PEIRCE a O.H. MITCHELL del 21 de diciembre de 1882.

*
* *

ALBERT DE SAXE : Logica Albertucii Perutilis Logica (Venise, 1522).

BEHMANN H. : "Beiträge zur Algebra der Logik", *Mathematische Annalen,* 86 (1922).

BETH E.W. : The Foundations of Mathematics (New-York : 1966).

BIRKHOFF G. : Lattice Theory, 3e éd. (Providence : 1967).

BOCHENSKI I.M. : Formale Logik, 2e ed. (Freiburg/ München : 1962).

BOOLE G. : – The Mathematical Analysis of Logic, being an Essay toward a calculus of deductive Reasoning (London : 1847)

– An Investigation of the Laws of Thought, on which are founded the mathematical Theories of Logic and Probabilities (London : 1854).

BECKER O. : Einführung in die Logistik vorzüglich in der ModalKalkül (1951).

BRENT J.L. : A Study of the Life of C.S. PEIRCE (Los Angeles : 1960).

BURLEIGH W. : De puritatae artis logicae tractatus longior, éd. Boehner (Louvain : 1955).

CAYLEY A. : – "On the theory of groups as depending on the symbolical equation $\theta^n = 1$", *Phil. Mag.*, VII (1857)

– "On the Partitions of a Close", *Collected Mathematical Papers*, IV (1857).

CHURCH A. : Introduction to Mathematical Logic, I (Princeton : 1956).

COOPER W.S. : "The propositional logic of ordinary discourse", *Inquiry*, XI (1968).

COPILOWISH I.M. : Matrix development of the calculus of relations, *Journal of Symbolic Logic*, 13 (1948).

DE MORGAN A. : – "On the Syllogism", *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, VIII (1846), IX (1851), X (1864).

– Formal Logic, or the Calculus of inference, necessary and probable (London : 1847).

– "On the Symbols of Logic, the Theory of Syllogism and in particular of the copula, and the application of the theory of probabilities to some questions of evidence", *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, IX (1856).

– "On the Syllogism IV and on the Logic of Relations", *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* (1864).

DOPP J. : "La formalisation de la logique", *Revue philosophique de Louvain*, L (1952).

FEYS R. : "Les logiques nouvelles des modalités", *Revue Néoscolastique de Philosophie*, XL (1937), XLI (1938).

FISCH M. & COPE J. : "PEIRCE at the Johns Hopkins University", *Studies in the Philosophy of C.S. PEIRCE* (Cambridge : 1952).

FISCH M. & TURQUETTE A. : "PEIRCE's Triadic Logic", *Transactions of the C.S. PEIRCE Society*, II (1966).

FRAENKEL A. : Einleitung in die Mengenlehre, 3e éd. (1928).

FREGE G. : Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens (Halle : 1879).

GALIEN : Institutio Logica, ed. Kalbfleisch (Leipzig : 1896).

GARDNER M. : Logic Machines and Diagrams (New-York : 1958).

GENTZEN G. : – "Untersuchungen über das logische Schliessen", *Mathematische Zeitschrift* XXXIX (1934/35).

– Recherches sur la déduction naturelle (Paris : 1955).

GERGONNE J.D. : "Essai de dialectique rationnelle", *Annales de Mathématiques pures et appliquées,* VII (1816/1817).

GRASSMANN : Die Begriffslehre oder Logik, II, Buch der Formenlehre oder Mathematik (Stettin : 1872).

HILBERT D. & ACKERMANN W. : Principles of Mathematical Logic (New-York : 1950), traduction de Grundzüge der theoretischen Logik.

HUGUES & CRESWELL : An Introduction to Modal Logic (London : 1968).

HUNTINGTON E. : "Sets of independent postulates for the Algebra of Logic", *Transactions of the American Mathematical Society,* V (1904).

HUSSERL : Logique formelle et logique transcendantale, trad. S. Bachelard, 2e éd. (1965).

JEVONS W. : – Pure Logic, or the Logic or Quality apart from Quantity (London, New-York : 1864).

– "Recent Mathematico-Logical Memoirs", *Nature* (24 mars 1881).

JASKOWSKI S. : "On the rules of Suppositions in Formal Logic", *Studia Logica,* I (Varsovie : 1934).

KEMPE A.B. : – "Memoir on the Theory of Mathematical Form", *Philosophical Transactions of the Royal Society of London,* CLXXVII (1886).

– "A Correction and Explanation", *The Monist,* VII (1897).

KLEENE S.C. : Introduction to Metamathematics, 5e ed. (Amsterdam : 1964).

KNEALE W. & M. : The Development of Logic (London : 1962).

LADD-FRANKLIN : "On the algebra of Logic", *Studies in logic by members of the Johns Hopkins University* (Boston : 1883).

LAMBERT J.N. : "Sechs Versuche einer zeichenkunst in der Vernunftlehre", *Logische u. Philosophische Abhandlungen,* I (Berlin : 1782).

LEWIS C.I. : A survey of Symbolic logic (New-York : 1960).

LUKASIEWICZ : – "O logice trójwartósciowej", *Ruch Filozoficzny,* V(1920).

– "The shortest axiom of the implicational calculus of propositions", *Proceedings of the Royal Irish Academy,* LII (1948).

MacCOLL H. : — "The calculus of equivalent statements and integration limits", *Proceedings of the London Mathematical Society,* IX, X, XI (1877/1880).

— Lettres parues dans *Nature* (21 avril, 5 mai, 9 juin 1881).

MITCHELL O.H. : "On a new algebra of logic", *Studies in Logic by members of the Johns Hopkins University* (Boston : 1883).

MORSE A.P. : A Theory of Sets (New-York, London : 1965).

MURPHEY M.G. : The development of PEIRCE's Philosophy (Cambridge : 1961).

NICOD J.G.P. : "A reduction in the number of the primitive propositions of logic", *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society,* XIX (1917/1920).

PEIRCE B. : "Linear Associative Algebras with notes and addenda by C.S. PEIRCE", *American Journal of Mathematics,* IV (1881).

Pierre d'ESPAGNE : Summulae Logicales, éd. I.M. Bochenski (Turin : 1947).

POST : "Introduction to a general theory of elementary propositions", *American Journal of Mathematics,* XLIII (1921).

PRIOR A.N. : Formal logic, 2e éd. (Oxford : 1962).

QUINE W.V. : Mathematical Logic (New-York : 1962).

ROBERTS Don Davis : The existential graphs of C.S. PEIRCE (Illinois : 1963).

ROSSER J.B. : Logic for Mathematicians (New-York : 1953).

ROSSER J.B. et TURQUETTE A.N. : Many valued logics (Amsterdam : 1952).

RUSSELL B. : "The Theory of implication", *American Journal of Mathematics* XXVIII (1906).

SCHRÖDER : Vorlesungen über die Algebra der Logik I, II, III (Leipzig : 1890/1905).

SHEFFER H.M. : "A Set of five independent postulates for Boolean Algebras, with applications to logical constants", *Transactions of the American Mathematical Society,* XIV (1913).

SŁUPECKI : "Der volle dreiwertige AussagenKalkül", *Comptes rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie,* ch. III, XXIX (1936).

SOBOCINSKI B. : – "Note on a modal system of Feys – Von Wright", *Journal of computing Systems,* I (1953).

– "Axiomatisation of a Partial System of Three-value Calculus of Propositions", *Journal of computing Systems,* I (1952).

SYLVESTER J.J. : "On an application of the new atomic theory to the graphical representations of the invariants and covariants of binary quantics, with three appendices", *The collected Mathematical Papers of J.J. Sylvester* (Cambridge : 1909).

UEYAMA S. : "Development of PEIRCE's Theory of Logic", *The science of thought,* I (1954).

VON-WRIGHT G.H. : An Essay in modal logic (Amsterdam : 1951).

WAJSBERG M. : "Metalogische Beiträge", *Wiadomosci Matematyczne* XLIII (1937).

WEISS P. : "C.S. PEIRCE", *Dictionary of American Biography* (1934).

WHITEHEAD & RUSELL: Principia Mathematica (Editorial Paraninfo, Madrid, 1981).

ZEMAN J. Jay. : – The graphical logic of C.S. PEIRCE (Chicago : 1964)

– "A system of implicit quantification", *Journal of symbolic Logic,* n° 4-32 (1967).

Magallanes, 25.—Madrid-15.

ISBN: 84-283-1170-6